

УДК 62-226

Е. ЯРОШЕВИЧ, д-р техн. наук; К. ЖУР

Белостокский технический университет, Республика Польша

## ЧАСТОТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПРОДОЛЬНЫХ И ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТУПЕНЧАТЫХ СТЕРЖНЕЙ И ВАЛОВ

*В работе предложено применение методов функции Коши, характеристических рядов и частичной дискретизации к решению краевой задачи продольных и поперечных колебаний кусочно-переменных ступенчатых стержней и валов. Показано, что предложенные методы дают высокую точность расчета двухсторонних оценок собственных частот и позволяют получать относительно простые зависимости от упруго-массовых характеристик. Предложенные формулы могут быть использованы в инженерных расчетах динамики стержней и валов с переменным распределением параметров. Альтернативным среди точных методов является применение функции Бесселя, в нашем случае ограничиваемся использованием элементарных функций.*

**Ключевые слова:** фундаментальные решения, продольные и поперечные колебания, функция Коши

**Введение.** Составными элементами машин, приборов и структур являются зачастую прямолинейные упругие стержни. Однако задачи их колебаний в ряде случаев не исследовались детально (см., например, [1–5]). В частности, в литературе недостаточно освещены вопросы построения частотных уравнений ступенчатых стержней. В данной статье указанные вопросы рассматриваются с использованием соответствующих функций влияния для случаев переменного по длине распределения параметров жесткости и массы.

Приводятся общие способы построения фундаментальных решений и ряд конкретных формул, устанавливается одно существенное свойство функции влияния (частные производные любого порядка по параметру от фундаментального решения представляют собой с точностью до знака частные решения неоднородных уравнений, правыми частями которых являются производные того же порядка от дельта-функции). На этой основе разработаны способы построения общих решений, уравнений с сингулярными коэффициентами типа дельта-функции и ее производных и предложен метод «частичной» дискретизации исследований указанных задач (например, не дискретизируются функции распределенных жесткостей рассматриваемых систем).

Показано, что данные способы позволяют обходить трудности, возникающие при применении классических подходов, и получать качественно новые результаты. Например, получены решения ряда задач для упругих систем с произвольным кусочно-переменным распределением параметров (без применения условий сопряжения), построено универсальное частотное уравнение для продольных и крутильных колебаний неоднородного стержня с произвольным числом сосредоточенных масс или дисков, даны новые расчетные формулы для низшей частоты собственных изгибных колебаний неоднородных упругих стержней при различных условиях закрепления, установлены пределы при-

менности этих формул (в зависимости от соотношений жесткостей).

Приведены примеры универсальных частотных уравнений продольных и поперечных колебаний двухступенчатых стержней с жестко закрепленными концами и консолей. Полученные уравнения позволяют:

- а) определять частотные спектры точно, если функции влияния отдельных участков выражены в элементарных или специальных функциях;
- б) определять с заданной точностью путем применения двусторонних оценок и таблиц Бернштейна-Керопяна [4] первую и вторую собственные частоты и приближенно оценивать третью и четвертую, когда функция влияния строится в виде ряда по частотному параметру;
- в) применять точные результаты для исследования влияния распределенных и сосредоточенных параметров жесткости и массы на собственные колебания, а также для оценки точности вычисления частот различными приближенными методами (начальных параметров, конечных разностей, коллокаций, последовательных приближений и др.).

**Продольные колебания.** После разделения переменных в случае двухступенчатого стержня имеют два дифференциальных уравнения:

$$\begin{aligned} L_1[y_1] &= 0, \quad a \leq x \leq c; \\ L_2[y_2] &= 0, \quad c \leq x \leq b; \end{aligned} \quad (1)$$

граничные условия для стержня с закрепленными концами:

$$y_1(a) = 0, \quad y_2(b) = 0; \quad (2)$$

условия сопряжения:

$$y_1(c) = y_2(c), \quad f_1(c)y_1'(c) = f_2(c)y_2'(c). \quad (3)$$

Здесь

$$L_i[y_i(x)] \equiv (f_i(x)y_i')' + \omega^2 g_i(x)y_i; \quad i = 1, 2; \quad (4)$$

$$g_i(x) = m_i(x) + \sum_{j=1}^k M_j \delta(x - x_j); f_i(x) = EF_i(x); \quad (5)$$

функции распределенных жесткостей  $f_i(x)$  и масс  $m_i(x)$  считаются интегрируемыми и такими, что

$$\begin{aligned} f_1(x) > 0, m_1(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, c]; \\ f_2(x) > 0, m_2(x) \geq 0 \quad \forall x \in [c, b]; \\ a < x_1 < x_2 < \dots < x_k < b; x_j \neq c; j=(1, k); \end{aligned} \quad (6)$$

$M_j$  — величины сосредоточенных масс.

Сперва строим частотное уравнение для случая  $M_j = 0$  ( $j=1, k$ ). Функции влияния уравнений (1) и их частные производные обозначаем соответственно как

$$\begin{aligned} K_1(x, \alpha)(x, \alpha \in [a, c]); K_2(x, \alpha)(x, \alpha \in [c, b]); \\ \dot{K}_i(x, \alpha) = \frac{\partial K}{\partial \alpha}; K_i'(x, \alpha) = \frac{\partial^2 K}{\partial x \partial \alpha} \quad (i=1, 2). \end{aligned} \quad (7)$$

Полагая затем параметр  $\alpha = a$  для первого участка и  $\alpha = b$  — для второго, записываем общие решения в виде [8, 9]

$$\begin{aligned} y_1 = C_0 K_1(x, \alpha) + C_1 \dot{K}_1(x, \alpha); \\ y_2 = D_0 K_2(x, \alpha) + D_1 \dot{K}_2(x, \alpha), \end{aligned} \quad (8)$$

где  $C_0, C_1$  и  $D_0, D_1$  — производные постоянные.

Подставляя решения (7) в условия (2) и учитывая, что

$$K_i(\alpha, \alpha) = 0, K_i'(\alpha, \alpha) = f_i^{-1}(\alpha), \quad (9)$$

получаем  $C_1 = D_1 = 0$ . Следовательно,

$$y_1 = C_0 K_1(x, a), y_2 = D_0 K_2(x, b). \quad (10)$$

Используя затем условия сопряжения (3), приходим к системе двух однородных алгебраических уравнений на постоянные  $C_0$  и  $D_0$ . Ее определитель дает частотное уравнение

$$\begin{vmatrix} K_1(c, a) & -K_2(c, b) \\ f_1(c)K_1'(c, a) & -f_2(c)K_2'(c, b) \end{vmatrix} = 0. \quad (11)$$

В случаях  $c \rightarrow a, c \rightarrow b$  и  $K_1 \equiv K_2 \equiv K$  ( $f_1 \equiv f_2, m_1 \equiv m_2$ ) приходим, как и должно быть, к уравнениям

$$K_2(a, b) = 0, K_1(a, b) = 0, K(a, b) = 0,$$

отвечающим непрерывному изменению распределенных параметров. Первые два из этих уравнений получаются из (11) с учетом (9), а последнее — из тождества [8]:

$$-K(c, a)K'(c, b) + K'(c, a)K(c, b) \equiv K(b, a). \quad (12)$$

Рассматриваем теперь случаи наличия сосредоточенных масс  $M_j \neq 0$  ( $j = 1, k$ ). Чтобы записать соответствующие частотные уравнения, следует в уравнении (11) функции  $K_i(x, \alpha)$  заменить на  $Q_i(x, \alpha)$ , определяемые формулой [10, 11]:

$$\begin{aligned} Q_i(x, \alpha) \equiv K_i(x, \alpha) + \sum_{s=1}^k \alpha_s K_i(x_s, \alpha) \phi_i(x, x_s) + \\ + \sum_{s=1}^{k-1} \sum_{t>s}^k \alpha_s \alpha_t K_i(x_s, \alpha) K_i(x_t, x_s) \phi_i(x, x_t) + \dots + \\ + \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k K_i(x_1, \alpha) K_i(x_2, x_1) \dots K_i(x_k, x_{k-1}) \phi_i(x, x_k); \end{aligned} \quad (13)$$

$$\alpha_s = M_s \lambda^2 (\lambda^2 = -\omega^2), \quad (s=1, k). \quad (14)$$

Здесь

$$\phi_i(x, \alpha) \equiv K_i(x, \alpha) \theta(x - \alpha) \quad (i=1, 2) \quad (15)$$

является фундаментальным решением, т. е. решение уравнения  $L_i[y] = \delta(x - \alpha)$ ;  $\theta(x)$  — единичная функция Хевисайда. Подобным образом строятся частотные уравнения продольных (и крутильных) колебаний ступенчатых стержней при иных крайних условиях. Например, в случае консоли, заменив второе условие (2) на  $f_2(b)y_2'(b) = 0$ , приходим к частному уравнению

$$f_2(c)K_1(c, a)\dot{K}_2'(c, b) + f_1(c)K_1'(c, a)\dot{K}_2(c, b) = 0. \quad (16)$$

Отсюда также нетрудно получить предельные уравнения ( $c \rightarrow a; c \rightarrow b; K_1 \equiv K_2$ ), как и более общие частотные уравнения для консолей с непрерывным и дискретным распределением параметров.

*Примечание.* Если учитываются силы малого трения, пропорциональные скоростям, то можно применить метод частичной дискретизации [4, 10]. При этом приходим к соответствующим частотным (характеристическим) уравнениям с учетом трения, заменяя  $\alpha_s$  в (14) на

$$\alpha_s = M_s \lambda^2 + b_s \lambda + C_s \quad (s=1, k), \quad (17)$$

где  $\lambda$  — характеристический показатель;  $b_s, C_s$  — параметры трения и упругих связей соответственно.

**Изгибные колебания.** Аналогично строятся частотные уравнения задач вида (1–5), отвечающих поперечным колебаниям двухступенчатых стержней. При этом сохраняются обозначения (1), где

$$L_i[y_i] \equiv (f_i(x)y_i'')'' - \omega^2 g_i(x)y_i \quad (i=1, 2), \quad (18)$$

где  $f_i(x) = E_i J_i(x)$  — изгибные жесткости участков,  $g(x)$  — функции распределения масс (5).

В случае жесткого закрепления концов к граничным условиям (2) и условиям сопряжения (3) добавляются еще по два условия соответственно:

$$y_1(a) = 0, y_2'(b) = 0; \quad (19)$$

$$\begin{aligned} f_1 y_1'' = f_2 y_2'' \quad \text{при } x = c; \\ (f_1 y_1')' = (f_2 y_2')' \quad \text{при } x = c. \end{aligned} \quad (20)$$

Общие решения определяем соотношениями

$$\begin{aligned} y_1(x) = C_{0i} K_i(x, \alpha) + C_{1i} \dot{K}_i(x, \alpha) + \\ C_{2i} \ddot{K}_i(x, \alpha) + C_{3i} \dddot{K}_i(x, \alpha) \quad (i=1, 2), \end{aligned} \quad (21)$$

где  $C_{ri}$  — произвольные постоянные ( $r = 0 \div 3$ , все другие обозначения остаются такими же или имеют аналогичный смысл).

Поступая так же, как и в случае продольных колебаний, приходим сначала к частотным уравнениям при отсутствии сосредоточенных масс:  
- для стержня с закрепленными концами

$$\begin{pmatrix} K_1 & \dot{K}_1 & K_2 & \dot{K}_2 \\ K_1' & \dot{K}_1' & K_2' & \dot{K}_2' \\ f_1 K_1'' & f_1 \dot{K}_1'' & f_2 K_2'' & f_2 \dot{K}_2'' \\ (f_1 K_1''') & (f_1 \dot{K}_1''') & (f_2 K_2''') & (f_2 \dot{K}_2''') \end{pmatrix}_{\substack{K_1(a,c) \\ K_2(c,b)}} = 0; \quad (22)$$

- для консольного стержня (в этом случае вторые условия в (2) и (19) заменены соответственно равенствами нулю при  $x = b$  изгибающего момента и перерезывающей силы):

$$f_2 y_2'' = 0 \text{ и } (f_2 y_2'')' = 0 \text{ при } x = b;$$

$$\begin{pmatrix} K_1 & \dot{K}_1 & \ddot{K}_2 & \ddot{K}_2 \\ K_1' & \dot{K}_1' & \ddot{K}_2' & \ddot{K}_2' \\ f_1 K_1'' & f_1 \dot{K}_1'' & f_2 \ddot{K}_2'' & f_2 \ddot{K}_2'' \\ (f_1 K_1''') & (f_1 \dot{K}_1''') & (f_2 \ddot{K}_2''') & (f_2 \ddot{K}_2''') \end{pmatrix}_{\substack{K_1(a,c) \\ K_2(c,b)}} = 0; \quad (23)$$

$$\Delta \equiv K_1 \begin{pmatrix} f_2^2 \dot{K}_1 \left( \ddot{K}_2 \ddot{K}_2''' - \ddot{K}_2'' \ddot{K}_2'' \right) - \\ - f_1 f_2 \dot{K}_1' \left( \ddot{K}_2 \ddot{K}_2''' - \ddot{K}_2'' \ddot{K}_2'' \right) \\ + f_1 f_2 \dot{K}_1'' \left( \ddot{K}_2 \ddot{K}_2''' - \ddot{K}_2'' \ddot{K}_2'' \right) \end{pmatrix} -$$

$$- K_1' \begin{pmatrix} f_2^2 \dot{K}_1 \left( \ddot{K}_2 \ddot{K}_2''' - \ddot{K}_2'' \ddot{K}_2'' \right) - \\ - f_1 f_2 \dot{K}_1' \left( \ddot{K}_2 \ddot{K}_2''' - \ddot{K}_2'' \ddot{K}_2'' \right) \\ + f_1 f_2 \dot{K}_1'' \left( \ddot{K}_2 \ddot{K}_2''' - \ddot{K}_2'' \ddot{K}_2'' \right) \end{pmatrix} +$$

$$+ f_1 K_1'' \begin{pmatrix} f_2 \dot{K}_1 \left( \ddot{K}_2 \ddot{K}_2''' - \ddot{K}_2'' \ddot{K}_2'' \right) - \\ - f_2 \dot{K}_1' \left( \ddot{K}_2 \ddot{K}_2''' - \ddot{K}_2'' \ddot{K}_2'' \right) \\ + f_1 \dot{K}_1'' \left( \ddot{K}_2 \ddot{K}_2''' - \ddot{K}_2'' \ddot{K}_2'' \right) \end{pmatrix} -$$

$$- f_1 K_1''' \begin{pmatrix} f_2 \dot{K}_1 \left( \ddot{K}_2 \ddot{K}_2''' - \ddot{K}_2'' \ddot{K}_2'' \right) - \\ - f_2 \dot{K}_1' \left( \ddot{K}_2 \ddot{K}_2''' - \ddot{K}_2'' \ddot{K}_2'' \right) \\ + f_1 \dot{K}_1'' \left( \ddot{K}_2 \ddot{K}_2''' - \ddot{K}_2'' \ddot{K}_2'' \right) \end{pmatrix}_{\substack{K_1(a,c) \\ K_2(c,b)}} = 0. \quad (24)$$

Уравнения (22) и (23) согласуются с соответствующими известными уравнениями [5, 11] для стержней с кусочно-постоянным распределением параметров.

Для получения частотных характеристических уравнений при наличии как распределенных, так и сосредоточенных параметров, следует в уравнениях (22) и (23) произвести такие же замены, как и ранее, пользуясь соотношениями (13)–(15). Заменяя после этого в полученных уравнениях величины  $\alpha_s$  (14) на  $\alpha_s$  (17), приходим соответственно к характеристическим уравнениям, в которых учитываются малые силы трения и упругие связи/параметры  $b_s$  и  $C_s$ .

**Коэффициенты влияния и метод частичной дискретизации.** Рассмотрим пример применения метода к задаче об изгибных колебаниях упругой консоли переменного сечения. Дифференциальные уравнения малых колебаний стержня с сосредоточенными массами можно составлять, используя так называемые «статические коэффициенты влияния» [1], которые будем обозначать через  $\beta_{ij}$ .

Для их определения, как и в случае стержня постоянного поперечного сечения, следует найти прогиб консоли под действием перпендикулярной к ней единичной силы  $P = 1$ , приложенной на расстоянии  $x = \tilde{x}$  от левого (заделанного) конца ( $x = 0$ ). Этот прогиб обозначен через  $y_{(0)} = 0$ .

Полагая в универсальном уравнении упругой линии  $y'_{(0)} = 0$  и учитывая формулу, имеем

$$y(x) = M_{(0)} \Phi_{(x,0)} + Q_{(0)} \Phi_{(x,0)} + P \Phi_{(x,\tilde{x})}. \quad (25)$$

Отсюда находим

$$f(x)y'' = -M_{(0)} + Q_{(0)}x + P \cdot (x - \tilde{x})\theta(x - \tilde{x}); \quad (26)$$

$$(f(x)y'')' = Q_{(0)} + P \cdot Q(x - \tilde{x}). \quad (27)$$

Здесь и далее использовано известное из анализа правило дифференцирования интеграла по параметру:

$$[f(x)y'']_{x=l} = 0; \quad [f(x)y']_{x=l} = 0,$$

Поскольку на свободном конце стержня имеют место условия

$$[f(x)y'']_{x=l} = 0; \quad [f(x)y']_{x=l} = 0, \quad (28)$$

то после подстановки соотношений (25) и (26) в (27) при  $P = 1$  получаем

$$Q(0) = -1, \quad M(0) = -\tilde{x}. \quad (29)$$

Следовательно,

$$y(x, \tilde{x}) = -\tilde{x} \Phi(x, 0) - \Phi(x, 0) + \Phi(x, \tilde{x}); \quad (30)$$

полагая здесь  $x = x_i, \tilde{x} = x_j$ , имеем

$$\beta_{ij} = -x_j \Phi(x_i, 0) - \Phi(x_i, 0), \quad (x_i \leq x_j),$$

$$\phi(x, \alpha) = \int_{\alpha}^x \frac{1}{f(s)} (x-s)(s-\alpha) ds \theta(x-\alpha). \quad (31)$$

Отметим, что для коэффициентов влияния имеет место симметрия [1]:

$$\beta_{ij} = \beta_{ji}, \quad (32)$$

выражающая известный принцип взаимности перемещений (при наличии сжимающей или растягивающей консервативной силы, приложенной к свободному концу консоли, соотношение (32) для соответствующих коэффициентов влияния сохраняется; при неконсервативной силе, например, следящей, — нет).

В выполнении этого принципа в рассматриваемом случае нетрудно убедиться, если учесть, что согласно (30)

$$\beta_{ij} = -x_j \Phi(x_j, 0) - \Phi(x_j, 0) + \Phi(x_j, x_i), \quad (33)$$

а затем, после подстановки правых частей (31) и (33) в (32).

Дифференциальные уравнения малых колебаний безмассовой консоли с сосредоточенными массами можно теперь записать в так называемой «обратной форме» [10]:

$$\sum_{j=1}^n M_j \beta_{ij} \frac{d^2 y_j}{dt^2} + y_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (34)$$

здесь  $M$  (как и раньше) — величина сосредоточенной массы в точке оси  $x = x_j$ ,  $y_j = y(x_j, t)$  — соответствующая обобщенная координата.

Таким образом, после вычисления коэффициентов влияния (31) и определения величин «сосредотачиваемых» масс по формуле

$$M_{k+1} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} q(x) dx \quad (k=0, 1, \dots, n-1), \quad (35)$$

уравнения колебаний (34) рассматриваемых систем с  $n$  степенями свободы можно считать построенными, и определять частоты и формы их собственных колебаний известными методами [1].

Уравнение частот или вековое уравнение системы (34) имеет вид [10]:

$$\begin{bmatrix} -M_1 \beta_{11} \omega^2 & -M_2 \beta_{12} \omega^2 \dots & -M_n \beta_{1n} \omega^2 \\ -M_1 \beta_{21} \omega^2 & -M_2 \beta_{22} \omega^2 \dots & -M_n \beta_{2n} \omega^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ -M_1 \beta_{n1} \omega^2 & -M_2 \beta_{n2} \omega^2 \dots & -M_n \beta_{nn} \omega^2 \end{bmatrix}, \quad (36)$$

или в развернутой форме

$$1 - a_1 \omega^2 + a_2 \omega^4 - \dots = 0. \quad (37)$$

Следовательно,

$$a_0 = 1; \quad a_1 = \sum_{i=1}^n M_i \beta_{ii};$$

$$a_2 = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j \geq i}^n M_i M_j (\beta_{ii} \beta_{jj} - \beta_{ij}^2). \quad (38)$$

Для приближенного нахождения основной частоты оказывается достаточным применить оценку  $a \omega_0^2 = 70,81$  при  $n \geq 6$  и как показывают

многие примеры, при этом достигается точность не менее 5 %.

Если потребуется более высокая точность определения основной частоты, то необходимо вычислить последующие коэффициенты  $a_3, a_4$  и найти уточненные (нижнюю и верхнюю) оценки или применить метод характеристических рядов.

В заключение заметим, что при других условиях закрепления стержня коэффициенты влияния определяются формулами, которые выводятся аналогично. В частности, если концы балки шарнирно оперты, то

$$\beta_{ij} = -\Phi(l, x_j) \frac{x_i}{l} + \left(1 - \frac{x_i}{l}\right) \left[ \Phi(l, 0) \frac{x_j}{l} - \Phi(x_i, 0) \right]. \quad (39)$$

Отсюда, в случае постоянной жесткости, приходим к хорошо известным соотношениям [1, 8].

Приведем теперь пример определения основной частоты методом частичной дискретизации. Рассмотрим консольную балку в виде кругового конуса, изгибная жесткость и масса которого заданы формулами:

$$f(x) = f_0 \left(1 - \gamma \frac{x}{l}\right)^4; \quad q(x) = m_0 \left(1 - \gamma \frac{x}{l}\right)^2. \quad (40)$$

Здесь  $f_0 = EJ_0$ ,  $m_0 = \pi \rho R^2$  — жесткость и масса в сечении  $x = 0$ ;  $\gamma = l/H$  — параметр «конусности»;  $l$  — длина стержня или высота усеченного конуса (что одно и то же);  $H$  — высота соответствующего полного конуса. Заметим, что  $0 \leq \gamma \leq 1$ , причем значение  $\gamma = 0$  отвечает стержню постоянного сечения, а  $\gamma = 1, H = 1$  — остроконечному конусу.

Полагая

$$x_{i+1} = \frac{1}{2n} (2i+1) \quad (i=0, 1, \dots, n-1) \quad (41)$$

и учитывая (40), (35), находим

$$M_j = \frac{m_0 l}{3n} \left[ 3 - \frac{3\gamma}{n} (2j-1) + \frac{\gamma^2}{n^2} (3j^2 - 3j + 1) \right]. \quad (42)$$

После вычисления интеграла в (31) получаем

$$\Phi(x, \alpha) = \frac{(x-\alpha)^3}{6f_0(1-\gamma x_i)^2(1-\gamma \alpha)^2} \cdot \theta(x-\alpha). \quad (43)$$

Затем по формуле (31) определяем коэффициенты влияния

$$\beta_{ij} = \frac{x_i^2}{6f_0(1-\gamma x_i)_2} \left[ 3x_j - x_i(2\gamma x_j + 1) \right]. \quad (44)$$

**Результаты вычислений** для остроконечной консоли ( $\gamma = 1$ ) и значений  $x_i$  (41) приведены в таблице. В таблице

$$a = \frac{m_0 l}{EJ_0}, \quad (45)$$

где  $\overline{a \omega_0^2}$  — значение наименьшего корня уравнения (37),  $a \omega_0^2$  — значение того же корня, вычисленное с избытком по формуле.

Таблица — Частота колебаний

$N$	$\overline{\alpha\omega_0^2}$	$\underline{\alpha\omega_0^2}$	среднее
2	41,69	41,78	41,73
4	61,81	64,53	63,17
6	68,76	72,85	70,81
8	71,43	75,69	73,56
10	72,68	76,84	74,76
100	74,81	78,21	76,51

**Выводы.** Построены характеристические (частотные) уравнения для собственных колебаний (продольных и поперечных) двухступенчатых стержней с произвольными допустимыми законами распределения жесткостей и масс на каждом из участков. Рассмотрены случаи жесткого закрепления концов стержней и консолей, а также рациональные способы учета малых сил трения и упругих связей. Предложенный путь построения отмеченных уравнений применим к любым другим условиям закрепления двухступенчатых стержней и является для них более рациональным, чем обобщенный метод начальных параметров [4]. Полученные уравнения позволяют исследовать ряд задач, отмеченных в пунктах а–в введения.

#### Список литературы

1. Тимошенко, С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко, Д.Х. Янг, У. Уивер; пер. с англ. — М.: Машиностроение, 1985. — 472 с.
2. Василенко, Н.В. Теория колебаний / Н.В. Василенко. — Киев: Вища школа, 1992. — 429 с.
3. Maurizi, M.J. Natural frequencies of one-span beams with stepwise variable cross-section / M.J. Maurizi, P.M. Belle's // Journal of Sound and Vibration. — 1993. — 168(1). — Pp. 184–188.
4. Бернштейн, С.А. Определение частот колебаний стержневых систем методом спектральной функции / С.А. Бернштейн, К.К. Керопян. — М.: Госстройиздат, 1960. — 281 с.

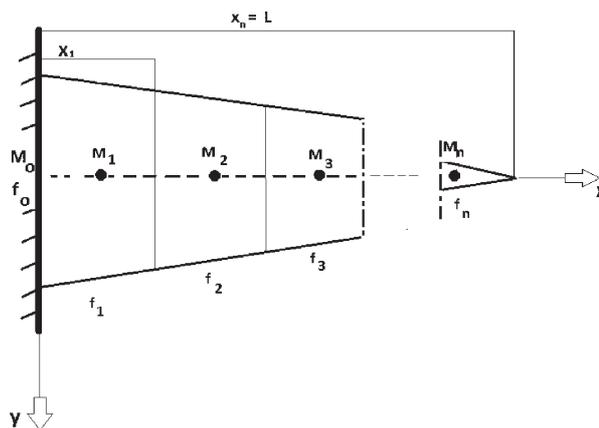


Рисунок — Модель поперечин

5. Микедошена, Ш.Е. Новые методы интегрирования дифференциальных уравнений и их приложения к задачам теории упругости / Ш.Е. Микедошена. — М.: Гостехиздат, 1951.
6. Cobble, M.H. Finite transform solution of the general conical cantilever beams problem / M.H. Cobble // Proc. 4th Techn. Meet. Soc. Eng. Sci., Raiegh, New York, 453–461, Recent Adv. Eng. — 1968. — Vol. 3.
7. Suppiger, E.W. Free lateral vibrations of beams of variable cross section / E.W. Suppiger, N.J. Taleb // ZAMP. — 1956. — 7, No 6.
8. Jaroszewicz J.L. Drgania gietne belki wspornikowej o zmiennym przekroju, Rozprawy Inzynierskie / J. Jaroszewicz, L. Zoryj. — 1985. — № 33. — 537–547.
9. Jaroszewicz, J. Wplyw parametrow zmiennego przekroju na drgania gietne wybranych belek i walow wspornikowych / J. Jaroszewicz, L. Zoryj // Ibid. — 1987. — No 35. — 523–534.
10. Jaroszewicz, J. The method of partial discretization in free vibrations problems of circular plates with variable distribution of parameters / J. Jaroszewicz, L. Zoryj // International Applied Mechanics. — 42, 3. — Pp. 364–373.
11. Kukla, S. Free vibrations of axially loaded stepped beams by using a Green's function method / S. Kukla, I. Zamojska // Journal of Sound and Vibration. — Vol. 300, Is. 3–5. — Pp. 1034–1041.
12. Jaroszewicz, J. Limitations in application of basic frequency simplest lower estimators in investigation of natural vibrations circular plates with variable thickness and clamped edges / J. Jaroszewicz, M. Misiukiewicz, W. Puchalski // Journal of Theoretical and Applied Mechanics. — 2008. — Vol. 46, No 1. — Pp. 109–121.

Jaroszewicz J., Zhur K.

#### Frequency equations of lateral and transversal vibrations of steps bars and shafts

In actual machine building corresponding with increase rotation velocity and transmission loading in driving assemblies questions calculating of vibrations characteristic of bars and shafts are very important. Inaccuracy or simplest dynamic model leads to wrong results of calculations of natural frequencies and forms. Then proposed in this paper methods Cauchy function and characteristic series gives calculation with high accuracy steps bars and shafts with a variable distribution rigidity and masses parameters.

Поступила в редакцию 26.09.2012.