

УДК 539.3

А.С. КРАВЧУК, д-р физ.-мат. наук; А.И. КРАВЧУК, канд. физ.-мат. наук  
Белорусский государственный университет, г. Минск

## УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЕ НАНОВНЕДРЕНИЕ ИДЕАЛЬНЫХ ПИРАМИДАЛЬНЫХ ИНДЕНТЕРОВ В ТОНКОЕ КОМПОЗИЦИОННОЕ ПОКРЫТИЕ, СОСТОЯЩЕЕ ИЗ МАТЕРИАЛОВ, ДЕФОРМАЦИЯ КОТОРЫХ ОПИСЫВАЕТСЯ БИЛИНЕЙНОЙ ДИАГРАММОЙ ПРАНДТЛЯ

*В статье предложена модель упруго-пластического нановнедрения правильного многогранного индентера в композиционное покрытие. Впервые модель Винклера обобщена на случай упруго-пластической деформации композиционного покрытия. Предполагается, что упруго-пластическая деформация каждого из материалов многокомпонентного покрытия моделируется билинейной диаграммой Прандтля. По их коэффициентам определены эффективные упруго-пластические коэффициенты композиционного покрытия в целом, исходя из средних значений, полученных с использованием гипотезы Фойгта и Рейсса. В ходе численных экспериментов установлено, что полученная теоретическая кривая нановнедрения многогранного индентера в композиционное покрытие качественно соответствует кривым, получаемым экспериментально.*

**Ключевые слова:** эффективные механические характеристики композиционных материалов, диаграмма Прандтля, основание Винклера

**Введение.** Одним из самых перспективных способов создания износостойких композиций, применяемых для защиты поверхностей деталей, работающих в агрессивных средах, является использование покрытий, в том числе из наноструктурированных композиционных материалов. Известно, что износ определяется упруго-пластическими характеристиками покрытия. Поэтому актуальной проблемой является разработка способов теоретического предсказания упруго-пластических характеристик, нано- и микротвердости износостойких защитных композиционных покрытий на этапе их проектирования.

**Обоснование выбора физической модели для определения твердости покрытия.** В настоящее время в литературе используются методики, основанные на использовании формулы Герца и ее аналогов для пересчета объема пластических деформаций, вызванных внедрением многогранных инденторов в поверхность твердого тела. Основой такого пересчета является приравнивание вдавливаемых объемов для шарового индентора в теории Герца и многогранных инденторов, применяемых на практике.

Однако теория Герца разработана только для упругой деформации твердого тела (объекта индентирования) и дает лишь качественное совпадение с экспериментом для тела, выполненного из стекла [1]. Существуют лишь косвенные подтверждения правомерности теории Герца, заключающиеся в том, что Динник в своих работах 1909 года [2] экспериментально подтвердил теорию Герца исследованием удара шара о поверхность полупространства.

Однако отметим, что на момент проведения Динником своих экспериментальных работ (на-

чало 20 века) еще не было разработано средств контроля микрогеометрии поверхностей. В настоящее время известно [3], что именно качество поверхностей взаимодействующих тел вносит существенную поправку в реально измеряемые параметры взаимодействия криволинейных тел и при малых нагрузках полностью определяет их [3]. В связи с этим экспериментальные работы Динника нельзя воспринимать как подтверждение адекватности теории Герца для широкого круга материалов.

Одновременно в литературе развивалась и другая упрощенная теория контактного взаимодействия — это использование основания Винклера [1, 4]. Сильной стороной этой теории является то, что она пригодна как для малых, так и для конечных деформаций покрытия конечной толщины. Это определяет возможность ее применения к решению задач пластического внедрения инденторов, т. к. при их внедрении перемещения приповерхностных слоев соизмеримы с размерами внедряемой части индентора, что полностью отрицает возможность применения геометрических гипотез Герца, гарантирующих малую глубину внедрения индентора в полупространство по сравнению с размерами области контакта.

**Основные геометрические гипотезы, используемые в модели Винклера.** Предполагается, что поверхность композиционного покрытия плоская. Это значит, что отклонения поверхности малы в сравнении с глубиной внедрения пирамидального индентера [1]. Композиционное покрытие покрывает гладкое жесткое полупространство.

Предполагается, что покрытие может быть заменено призматическими стержнями с постоян-

ным квадратным сечением шириной  $\Delta$  и высотой  $h$  (рисунок 1). Ширина  $\Delta$  пренебрежимо мала в сравнении с радиусом  $a$  вписанной окружности в треугольную область контакта (рисунок 2). Стержни могут деформироваться только в  $Z$ -направлении [1, 4]. Индентером является правильная пирамида с  $m$  гранями, имеющая  $m - 1$  треугольных граней (см. рисунки 1, 2).

**Определение перемещений  $w(x, y, 0)$  в области контакта после внедрения правильной многогранной пирамиды.** Следует определить размер области контакта с помощью радиуса  $a$  (см. рисунок 2) и формы поверхности пирамиды  $f(x, y)$  в области  $\Gamma = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq a, -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{m-1}\right) \cdot x \leq y \leq \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{m-1}\right) \cdot x \right\}$ , где  $\Gamma \subset S$ ,  $S$  — правильная многоугольная область

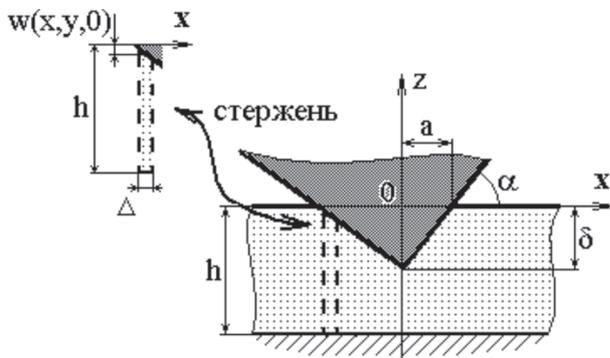


Рисунок 1 — Деформация покрытия правильным пирамидальным индентером

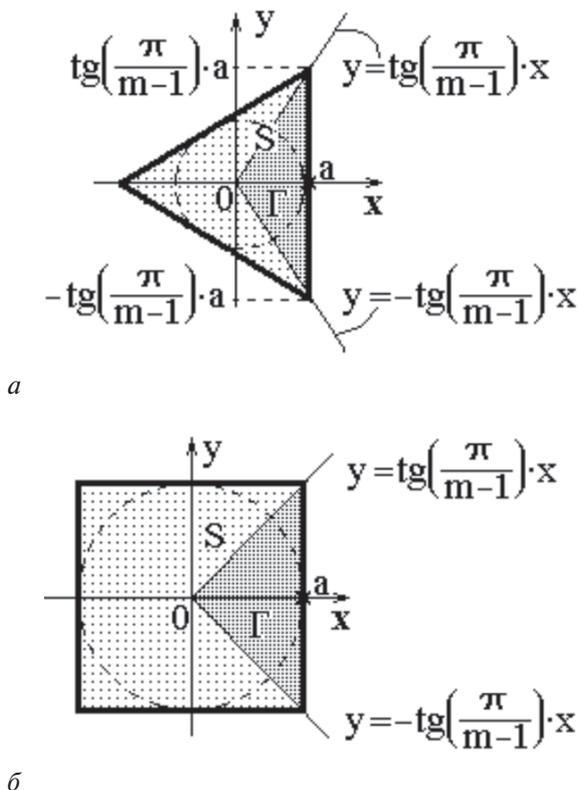


Рисунок 2 — Контактная область правильной пирамиды с  $m$  гранями:  $a - m = 4$ ;  $b - m = 5$

контакта (см. рисунок 2) [4]. Необходимо отметить, что поверхность  $f(x, y)$  идеальной правильной пирамиды с  $m - 1$  треугольными гранями, касающаяся поверхности покрытия, определяется в области  $\Gamma$  уравнением (см. рисунки 1, 2) [4]:

$$f(x, y)|_{\Gamma} = \operatorname{tg}(\alpha) \cdot x,$$

где  $\alpha$  — угол между треугольными гранями пирамиды и поверхностью покрытия (см. рисунок 1).

Поэтому максимальная глубина внедрения  $\delta$  определяется уравнением [4]:

$$\delta = -f(a, 0)|_{\Gamma} = -\operatorname{tg}(\alpha) \cdot a.$$

Следовательно,

$$w(x, y, 0)|_{\Gamma} = f(x, y)|_{\Gamma} + \delta = \operatorname{tg}(\alpha) \cdot (x - a). \quad (1)$$

**Основные геометрические гипотезы анализа композиционного покрытия.** Анализ литературных источников позволяет выделить следующий теоретический подход, используемый при исследовании процессов в структурно-неоднородных средах, — гомогенизация гетерогенной среды — основанный на введении параметров, усредненных по элементарным макрообъемам, значительно превосходящим размеры неоднородностей, но достаточно малым по сравнению с характерными размерами области взаимодействия тел. При таком методе основные уравнения механики сплошной среды формулируются в пространстве, точками которого являются элементарные макрообъемы (макроточки). Макроточкой называется элементарный макрообъем, размеры которого значительно превосходят характерные размеры неоднородностей, однако существенно меньше размеров тела. Будем предполагать, что призматические стержни с постоянным квадратным сечением шириной  $\Delta$  и высотой  $h$ , используемые при решении задачи, представляя собой макроточку.

**Общая схема нагружения элементарного макрообъема объема (макроточки) композиционного материала.** Для решения задачи определения эффективных модулей рассматривается элемент композиционного материала (макроточка), на границе которого задаются воздействия, имитирующие воздействия, возникающие в твердом теле, т. е. в данном случае рассматривается сжатие призматических стержней, входящих под внедряемой пирамидой (см. рисунок 1).

**Методика вычисления эффективных коэффициентов композиционного материала.** Принцип реализации метода гомогенизации для призматического стержня квадратного сечения из простейшей модели деформируемого покрытия (см. рисунок 1) заключается в следующем: если армированный материал состоит из  $N$  компонент (фаз) и в среднем изотропен (например, имеет место хаотическое армирование и т. п.), то мож-

но использовать гипотезу Фойгта для призматического стержня о том, что в простейших опытах на чистое растяжение/сжатие предполагается, что деформации по всему объему композиционного материала призматического стержня постоянны [5]. Второй предельный случай (гипотеза Рейсса) заключается в том, что в тех же простейших экспериментах на растяжение/сжатие предполагается, что напряжения по всему объему композиционного материала призматического стержня постоянны [6].

Полученные на основании этих гипотез формулы, имеют практическую ценность, так как являются соответственно верхней и нижней оценкой истинных модулей композиционного материала [7].

**Исходные данные для получения усредненных характеристик композиционных призматических стержней, моделирующих деформацию покрытия.** Предполагается, что значения объемных долей  $\gamma_k$  ( $k = \overline{1, N}$ ) (концентраций) компонент композиционного покрытия известны для покрытия в целом, и они же являются объемными долями компонент для каждого из стержней.

При усреднении упруго-пластических характеристик композиционного материала стержня предполагается, что деформационная кривая каждого материала многокомпонентного стержня при его сжатии или растяжении определяется билинейной диаграммой Прандтля (рисунок 3). Это означает, что механические свойства  $E_k$  (модуль упругости),  $E_{T,k}$  (касательный модуль пластичности при сжатии),  $\sigma_{T,k}^{сж}$  (предел текучести при сжатии) известны для каждой компоненты  $k$  ( $k = \overline{1, N}$ ).

**Применение гипотезы Фойгта для вычисления эффективных коэффициентов материала из  $N$  компонент для призматического стержня [5].** В данном случае следует решить задачу усреднения параметров материалов исходя из простого сжатия вертикально слоистого призматического стержня (рисунок 4), т. к. при таком нагружении гипотеза об однородной деформации всех компонент многокомпонентного покрытия удовлетворяется по определению. Более того, данная расчетная схема, очевидно, позволяет рассмотреть верти-

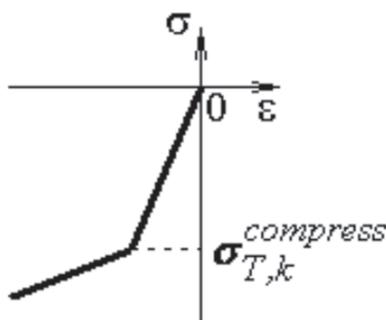


Рисунок 3 — Диаграмма деформации материала слоя с номером  $k$  при сжатии

кально слоистый стержень не более чем из  $N$  слоев. При этом  $k$ -ый вертикальный слой ( $k = \overline{1, N}$ ) имеет ширину, например, вдоль  $X$ -направления  $\Delta_k = \gamma_k \cdot \Delta$ , а вдоль  $Y$ -направления  $\Delta$  (рисунок 4). Очевидно, что направления  $X$  и  $Y$  равнозначны, поэтому полученные далее результаты не зависят от их перестановки.

Усреднение упруго-пластических характеристик вертикально слоистого стержня. Деформации  $\varepsilon_z(x, y, 0)$ , действующие в области контакта  $S$  на весь стержень с координатами  $(x, y) \in S$  (см. рисунок 4), равны соответствующим деформациям, действующим на все его вертикальные слои, т. е. выполнено равен-

$$\varepsilon_z(x, y, 0) = \varepsilon_z \left( \left( x - \frac{\Delta}{2} + \sum_{i=1}^k \Delta_i \right), y, 0 \right) = \frac{w(x, y, 0)}{h}$$

$\forall k = \overline{1, N}$ . Среднее напряжение  $\langle \sigma_z(x, y) \rangle$ , действующее на все вертикальные слои одного стержня, можно определить как

$$\langle \sigma_z(x, y) \rangle = \begin{cases} \langle E \rangle_{\Phi} \cdot \frac{w(x, y, 0)}{h}, & 0 \geq \frac{w(x, y, 0)}{h} > \langle \varepsilon_T^{сж} \rangle_{\Phi}, \\ \langle E_T \rangle_{\Phi} \cdot \frac{w(x, y, 0)}{h} - \langle \sigma_T^{сж} \rangle_{\Phi}, & \langle \sigma_T^{сж} \rangle_{\Phi} \geq \frac{w(x, y, 0)}{h}, \end{cases} \quad (2)$$

где усредненные по Фойгту коэффициенты вертикально слоистого призматического стержня определяются уравнениями:

$$\langle E \rangle_{\Phi} = \sum_{k=1}^N \gamma_k \cdot E_k;$$

$$\langle \sigma_T^{сж} \rangle_{\Phi} = \sum_{k=1}^N \gamma_k \cdot \left( \frac{E_{T,k} - E_k}{E_k} \right) \cdot \sigma_{T,k}^{сж};$$

$$\langle E_T \rangle_{\Phi} = \sum_{k=1}^N \gamma_k \cdot E_{T,k}.$$

**Вычисление эффективных коэффициентов материала из  $N$  компонент для призматического стержня с помощью гипотезы Рейсса [6].** В данном случае следует решить задачу усреднения параметров материалов исходя из простого сжа-

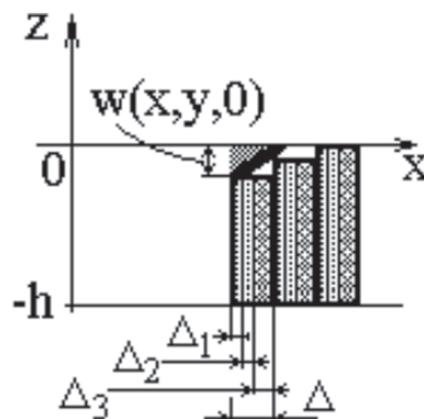


Рисунок 4 — Схема нагружения вертикально слоистого стержня

тия горизонтально слоистого призматического стержня (рисунок 5), т. к. при таком нагружении гипотеза об однородном напряженном состоянии всех компонент многокомпонентного покрытия удовлетворяется по определению. Данная расчетная схема, очевидно, требует рассмотреть горизонтально слоистый стержень не более чем из  $N$  слоев [4]. При этом  $k$ -ый слой ( $k = \overline{1, N}$ ) имеет высоту  $h_k = \gamma_k \cdot h$  (см. рисунок 5).

Напряжения  $\sigma_z(x, y, 0)$ , действующие в области контакта  $S$  на весь стержень с координатами  $(x, y) \in S$  (см. рисунки 1, 2), равны соответствующим напряжениям, действующим на все его горизонтальные слои, т. е. выполнено равенство

$$\langle \sigma_z(x, y) \rangle = \sigma_z(x, y, 0) = \sigma_z \left( x, y, -h + \sum_{i=1}^k h_i \right) \quad \forall k = \overline{1, N}.$$

Следуя методике, изложенной в [4], получаем уравнение для  $\sigma_z(x, y, 0)$  от  $w(x, y, 0)$  для решения контактной задачи:

$$\langle \sigma_z(x, y) \rangle = \begin{cases} \langle E \rangle \cdot \frac{w(x, y, 0)}{h}, & 0 \geq \frac{w(x, y, 0)}{h} > \langle \epsilon_T^{сж} \rangle, \\ \langle E_T \rangle \cdot \frac{w(x, y, 0)}{h} - \langle \sigma_T^{сж} \rangle, & \frac{\langle \sigma_T^{сж} \rangle}{\langle E \rangle} \geq \frac{w(x, y, 0)}{h}, \end{cases} \quad (3)$$

где усредненные по Рейссу коэффициенты горизонтально слоистого призматического стержня определяются уравнениями [4]:

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \left( \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{E_k} \right)^{-1}; \\ \langle \sigma_T^{сж} \rangle &= \frac{\sum_{k=1}^n \gamma_k \cdot \sigma_{T,k}^{сж} \cdot \left( \frac{E_{T,k} - E_k}{E_{T,k} \cdot E_k} \right)}{\sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{E_{T,k}}}; \\ \langle E_T \rangle &= \left( \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{E_{T,k}} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

**Вычисление эффективной диаграммы деформирования композиционного материала покрытия.** Следуя Хиллу [7], окончательно можно записать эффективную диаграмму деформирования мате-

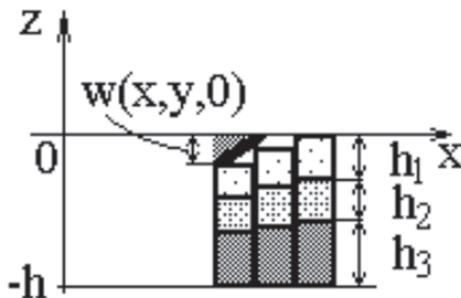


Рисунок 5 — Схема нагружения горизонтально слоистого стержня

риала композиционного покрытия, моделируемого призматическими стержнями. Исходя из (1), (2) и (3) получаем

$$\langle \sigma_z(x, y) \rangle \Big|_{\Gamma} = \begin{cases} \langle E \rangle_x \cdot \frac{tg(\alpha) \cdot (x-a)}{h}, \\ 0 \leq \frac{tg(\alpha) \cdot (x-a)}{h} < \langle \epsilon_T^{сж} \rangle_x, \\ \langle E_T \rangle_x \cdot \frac{tg(\alpha) \cdot (x-a)}{h} - \langle \sigma_T^{сж} \rangle_x, \\ \frac{\langle \sigma_T^{сж} \rangle_x}{\langle E \rangle} \leq \frac{tg(\alpha) \cdot (x-a)}{h}, \end{cases} \quad (4)$$

где эффективные упруго-пластические характеристики композиционного материала

$$\begin{aligned} \langle E \rangle_x &= \frac{1}{2} (\langle E \rangle + \langle E \rangle_{\Phi}) = \\ &= \frac{\left( 1 + \sum_{k=1}^N \gamma_k \cdot E_k \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{E_k} \right)}{\left( 2 \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{E_k} \right)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \sigma_T^{сж} \rangle_x &= \frac{1}{2} (\langle \sigma_T^{сж} \rangle + \langle \sigma_T^{сж} \rangle_{\Phi}) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\sum_{k=1}^N \gamma_k \cdot \left( \frac{E_{T,k} - E_k}{E_k \cdot E_k} \right) \cdot \sigma_{T,k}^{сж}}{\sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{E_{T,k}}} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^N \gamma_k \cdot \left( \frac{E_{T,k} - E_k}{E_k} \right) \cdot \sigma_{T,k}^{сж} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle E_T \rangle_x &= \frac{1}{2} (\langle E_T \rangle + \langle E_T \rangle_{\Phi}) = \\ &= \frac{\left( 1 + \sum_{k=1}^N \gamma_k \cdot E_{T,k} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{E_{T,k}} \right)}{\left( 2 \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{E_{T,k}} \right)}. \end{aligned}$$

**Функциональная зависимость между силой и глубиной внедрения правильного пирамидального индентора.** Т. к. индентер является правильной пирамидой с равными сторонами (см. рисунки 1, 2), сила величиной  $P$ , необходимая для создания соответствующей области контакта, может быть определена радиусом  $a$  в  $S$  и контактными напряжениями, действующими в одной области  $\Gamma$  (4) (см. рисунок 2):

$$P = - \int_S \langle \sigma_z(s) \rangle ds = -2(m-1) \cdot tg \left( \frac{\pi}{m-1} \right) \cdot \int_0^a \left( \langle \sigma_z(x, y) \rangle \Big|_{\Gamma} \cdot x \right) dx. \quad (5)$$

**Выводы.** В статье предложена модель упруго-пластического нановнедрения правильного многогранного индентера в композиционное покрытие. Впервые модель Винклера обобщена на случай упруго-пластической деформации композиционного покрытия. Предполагается, что упруго-пластическая деформация каждого из материалов многокомпонентного покрытия моделируется билинейной диаграммой Прандтля. По их коэффициентам определены эффективные упруго-пластические коэффициенты композиционного покрытия в целом, исходя из средних значений, полученных с использованием гипотезы Фойгта и Рейсса. В ходе численных экспериментов установлено, что полученная в соответствии с (4) и (6) теоретическая кривая нановнедрения многогранного индентера в композиционное покрытие конечной толщины качественно соответствует кривым получаемым экспериментально [4].

#### Список обозначений

$\Delta$  — ширина призматического стержня с постоянным квадратным сечением;  
 $h$  — высота призматического стержня с постоянным квадратным сечением;  
 $P$  — величина силы, приложенной к пирамиде;  
 $S$  — правильная многоугольная область контакта пирамиды и покрытия;  
 $a$  — радиус вписанной окружности в треугольную область контакта  $S$ ;  
 $\Gamma$  — подобласть  $S$ , определяемая множеством точек  $\left\{ (x, y): 0 \leq x \leq a, -tg\left(\frac{\pi}{m-1}\right) \cdot x \leq y \leq tg\left(\frac{\pi}{m-1}\right) \cdot x \right\}$ ;  
 $f(x, y)$  — форма поверхности пирамиды в области  $\Gamma$ ;

$w(x, y, 0)$  — перемещения в области контакта  $S$  после внедрения правильной многогранной пирамиды;  
 $\alpha$  — угол между треугольными гранями пирамиды и поверхностью покрытия;  
 $\delta$  — максимальная глубина внедрения;  
 $N$  — количество компонент в композиционном материале;  
 $\gamma_k (k = \overline{1, N})$  — объемные доли компонент композиционного покрытия;  
 $E_k$  — модуль упругости  $k$ -ой компоненты композиционного материала;  
 $E_{T,k}$  — касательный модуль пластичности при сжатии  $k$ -ой компоненты композиционного материала;  
 $\sigma_{T,k}^{сж}$  — предел текучести при сжатии  $k$ -ой компоненты композиционного материала;  
 $h_k$  — условная высота горизонтального слоя  $k$ -го материала при гипотезе Рейсса;  
 $\Delta_k$  — условная толщина вертикального  $k$ -го слоя материала при гипотезе Фойгта.

#### Список литературы

1. Джонсон, К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. — М: Мир, 1989. — 510 с.
2. Динник, А.Н. Удар и сжатие твердых тел / А.Н. Динник // Избр. тр. — Киев: АН СССР, 1952. — Т. 1. — С. 13–144.
3. Демкин, Н.Б. Контактное взаимодействие шероховатых поверхностей / Н.Б. Демкин. — М.: Наука, 1970. — 227 с.
4. Kravchuk, A. Penetration of a pyramid indenter into a multilayer coating / A. Kravchuk, Z. Rymuza, D. Jarzabek // Int. J. Mat. Res. (formerly Z. Metallkd.). — 2009. — Vol. 100, No 7. — Pp. 933–935.
5. Voigt, W. Lehrbuch der Kristallphysik / W. Voigt. — Berlin: Teubner, 1928. — Pp. 962.
6. Reuss, A. Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung / A. Reuss // Z. Angew. Math. Und Mech. — 1929. — 9, No 1. — Pp. 49–58.
7. Hill, R. A self-consistent mechanics of composite materials / R. Hill. — J. Mech. Phys. Solids. — 1965. — Vol. 13, No 4. — Pp. 213–222.

Kravchuk A.S., Kravchuk A.I.

#### Elastic-plastic nano-penetration of perfect pyramids in the thin composite coatings, consists of materials which deformation is described by prandtl bilinear diagram

The paper proposes a model of elastic-plastic nano-penetration of perfect multifaceted indenter into the composite coating. The Winkler foundation generalized to the case of elastic plastic deformation of the multi-component composite coating. The elastic-plastic deformation of the each component material of coating was modeled by bilinear diagram Prandtl. The effective elastic-plastic composite coefficients of the coating based on their average values which were obtained by using the Voigt and Reuss hypotheses. The theoretical curve of nano-penetration of multifaceted indenter in the composite coating of finite thickness qualitatively agrees with experiments.

**Keywords:** effective mechanical characteristics of composite materials, prandtl diagram, winkler foundation

Поступила в редакцию 20.11.2013.