УДК 533.6013.42:42.534.1

А.Н. КУЛИКОВ, канд. физ.-мат. наук
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Россия

АЛЬТЕРНАТИВНЫЙ ВАРИАНТ ОБЪЯСНЕНИЯ ПРИЧИНЫ ЖЕСТКОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ В ЗАДАЧЕ О НЕЛИНЕЙНОМ ПАНЕЛЬНОМ ФЛАТТЕРЕ

Рассматривается нелинейная краевая задача, описывающая колебания пластинки в сверхзвуковом потоке газа. Задача изучается в постановке В.В. Болотина при малом коэффициенте демпфирования. Показано, что приближенная реализация внутренних резонансов 1:1, 1:2, 1:3 может привести к жесткому возбуждению колебаний при скоростях меньших, чем скорость флаттера в традиционном ее понимании. Задача изучена без использования метода Галеркина.

Ключевые слова: *нелинейный панельный флаттер, краевая задача, устойчивость, резонансы, жесткое возбуждение колебаний, бифуркации*

Введение. Одной из наиболее известных задач теории упругой устойчивости можно считать задачу о панельном флаттере в сверхзвуковом потоке газа (например, [1–3]). Если скорость потока газа мала или умерена, то тривиальное состояние равновесия пластинки асимптотически устойчиво и все достаточно малые по амплитуде колебания затухают. Если же скорость потока превышает некоторую пороговую величину, то под воздействием этого потока у пластинки могут возникнуть незатухающие колебания, которые впоследствии способны привести к ее разрушению. В работе рассмотрим, по-видимому, один из простейших вариантов постановки такой задачи, когда изгиб считаем цилиндрическим, аэродинамические силы учитываются на базе закона плоских сечений [1] (поршневой теории). При таких допущениях получаем, что колебания пластинки могут быть изучены, если рассмотреть уравнение с частными производными [1]

$$\rho h w_{tt} + \rho h g_0 w_t + D w_{xxxx} + \chi p_\infty M w_x = $$
$$= [Eh/(2l(1-\upsilon^2))](\int_0^l (w_x)^2 dx) w_{xx} - \qquad (1)$$
$$- p_\infty [\chi(\chi+1)/(4c_\infty^2)][(w_t + U w_x)^2 + (w_t + U w_x)^3/3],$$

где l — длина пластинки; $w = w(t, x)$ — нормальный прогиб срединной поверхности; h — толщина пластинки; $D = Eh^3/(12(1-\upsilon^2))$ — цилиндрическая жесткость; E — модуль упругости, υ — коэффициент Пуассона; ρ — плотность материала пластинки. Наконец, U — скорость потока газа; c_∞ — скорость звука в рассматриваемой газовой среде; $M = U / c_\infty$ — число Маха; χ — показатель политропы; ρ_∞ — давление в невозмущенном газе; g_0 — интегральный коэффициент демпфирования. Его величина учитывает конструктивное демпфирование, а также аэродинамическое сопротивление. Нелинейное уравнение (1) выписано с точностью до кубических слагаемых и его следует рассматривать вместе с одним из вариантов краевых условий, характеризующих тип закреплений при $x = 0$, $x = l$. Перейдем к новым переменным и положим [1, 4–6]

$$x = lx_1,\ w = hu,\ t = l_0 t_1, \qquad (2)$$

где выбор положительной постоянной l_0 будет указан ниже. В результате замен (2) и преобразований уравнение (1) можно переписать в виде

$$u_{t_1t_1} + g u_{t_1} + u_{x_1x_1x_1x_1} + c u_{x_1} =$$
$$= 6u_{x_1x_1}\int_0^l (u_{x_1})^2 dx_1 - p_2(a u_{t_1} + b u_{x_1})^2 - p_3(a u_{t_1} + b u_{x_1})^3; \qquad (3)$$

$$g = g_0\sqrt{\rho h^2(1-\upsilon^2)/(E\gamma^4)};\ \gamma = h/l;$$
$$c = \chi p_\infty[12(1-\upsilon^2)M/(E\gamma^3)];\ p_3 = p_2 h/3;$$
$$p_2 = (3\chi(\chi+1)p_\infty(1-\upsilon^2)h^2)/(E\gamma^4);$$
$$a = 1/(c_\infty l_0);\ b = M/l;\ l_0^2 = (12\rho(1-\upsilon^2))/(E\gamma^4).$$

Ниже роль основного параметра задачи будет играть положительный коэффициент c. Уравнение (3) будем рассматривать вместе с краевыми условиями

$$u|_{x_1=0} = u_{x_1}|_{x_1=0} = u_{x_1x_1}|_{x_1=1} = u_{x_1x_1x_1}|_{x_1=1} = 0, \qquad (4)$$

т. е. будут рассмотрены колебания пластинки в условиях, когда левый конец жестко закреплен, а правый свободен. Отметим, что уравнение (3), а также некоторые его модифицированные варианты, обычно рассматривались вместе с краевыми условиями шарнирного опирания (см., например, [4–6])

$$u|_{x_1=0} = u|_{x_1=1} = u_{x_1x_1}|_{x_1=0} = u_{x_1x_1}|_{x_1=1} = 0. \qquad (4')$$

Часть результатов, относящихся к исследованию уравнения (3) вместе с краевыми условиями шарнирного опирания, были опубликованы в работах [4, 7–14]. Далее при записи уравнения (3) и его модификаций индекс «1» у независимых переменных t_1, x_1 будем опускать.

Если коэффициент демпфирования относительно велик, то математическая часть исследования флаттера состоит из двух частей. В первой части рассматривается линеаризованная краевая задача. Например, краевая задача

$$u_{tt} + gu_t + u_{xxxx} + cu_x = 0, \qquad (5)$$

$$u\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=0} = u_{xx}\big|_{x=1} = u_{xxx}\big|_{x=1} = 0. \qquad (6)$$

Из анализа линеаризованной краевой задачи (5), (6) определяется критическая скорость $c = c_*$ (скорость флаттера), при превышении которой нулевое состояние равновесия теряет устойчивость. Спектру устойчивости линейной краевой задачи при $c = c_*$ принадлежит пара простых чисто мнимых собственных значений (СЗ) $\pm i\sigma\,(\sigma > 0)$, а остальные СЗ спектра устойчивости лежат в полуплоскости, выделяемой неравенством $\operatorname{Re}\mu \le -\gamma_0 < 0$. Напомним, что $\mu \in C(R)$ называется точкой спектра устойчивости задачи (5), (6), если она имеет нетривиальные решения вида

$$u(t,x) = \exp(\mu t)v(x).$$

Точки спектра устойчивости и соответствующие собственные функции (СФ) могут быть определены как решения краевой задачи

$$A(c)v = \lambda v,\ v(0) = v'(0) = v''(1) = v'''(1) = 0, \qquad (7)$$

а СЗ линейного дифференциального оператора (ЛДО) $A(c)v = v^{(IV)} + cv'$ и СЗ спектра устойчивости связаны равенством $\mu^2 + g\mu + \lambda = 0$. Из анализа краевой задачи (7) можно заключить, что в рассматриваемом варианте дивергенция исключается, а может реализоваться лишь колебательный вариант потери устойчивости [1].

При $c = c_* + \varepsilon$, где ε — малый параметр, анализ уже нелинейной краевой задачи (например, (3), (4)) базируется на применении бифуркационной теоремы Андронова–Хопфа [4, 7]. В ситуации общего положения можно показать наличие у нелинейной задачи устойчивого (неустойчивого) периодического решения. В первом случае при $c \approx c_*$ имеем автоколебательный режим и разрушение пластинки носит усталостный характер. Во-втором случае реализуется вариант жесткого возбуждения колебаний.

Иная математическая задача возникает, если мал коэффициент демпфирования $g << 1$. Речь идет о коэффициенте демпфирования после перенормировок, а тогда он пропорционален $E^{-1/2}$, где E — модуль упругости. Очень часто эта физическая постоянная достаточно велика. Так, например, в системе СИ у стали $E = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м², а у вольфрама $E = 38 \cdot 10^{10}$ Н/м².

В работах [9, 10, 14] было показано, что у краевой задачи (5), (4′) при $g = 0$, $c \in [0; c_1)$, $c_1 > 0$ спектр устойчивости состоит из СЗ $\pm i\sigma_j(c), j = 1,2,\ldots,$ $\sigma_{j+1}(c) > \sigma_j(c) > 0$. При $c = c_1$ спектру устойчивости принадлежит пара двукратных СЗ $\pm i\sigma_1, \sigma_1 = \sigma_1(c_1)$. Понятно, что $c_1 < c_*$. Более того, существуют такие $c = c_2$, $c = c_3$ ($c_3 < c_2 < c_1 < c_*$), при которых (*а*) $\sigma_2(c_2) = 2\sigma_1(c_2)$, (*б*) $\sigma_2(c_3) = 3\sigma_1(c_3)$.

При указанных c_j иные младшие резонансы собственных частот отсутствуют.

Пусть $c \approx c_j$ ($j = 1, 2, 3$), $g \ne 0$, но достаточно малая положительная постоянная. Тогда реализуются уже не точные резонансы собственных частот, а приближенные. В свою очередь, при таким образом выбранных значениях c ($c \approx c_j$, $c_j < c_*$) уже нелинейная краевая задача может иметь неустойчивые периодические решения в достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия. В таком случае, хотя нулевое решение асимптотически устойчиво, но, тем не менее, возможно жесткое (докритическое) возбуждение незатухающих колебаний.

Анализ линейной краевой задачи. В данном разделе будет рассмотрена линеаризованная краевая задача

$$u_{tt} + A(c)u = 0; \qquad (8)$$

$$u\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=0} = u_{xx}\big|_{x=1} = u_{xxx}\big|_{x=1} = 0. \qquad (9)$$

Здесь ЛДО имеет следующий вид $A(c)\ v(x) = v^{(IV)}(x) + cv'(x)$. При отсутствии демпфирования $\mu^2 = -\lambda$, где λ — СЗ ЛДО $A(c)$, область определения которого состоит из достаточно гладких функций $v(x)$, удовлетворяющих краевым условиям

$$v(0) = v'(0) = v''(1) = v'''(1) = 0.$$

СЗ ЛДО $A(c)$ следует искать как нетривиальные решения краевой задачи

$$\begin{gathered} v^{(IV)} + cv' = \lambda v, \\ v(0) = v'(0) = v''(1) = v'''(1) = 0. \end{gathered} \qquad (10)$$

Отметим некоторые свойства СЗ краевой задачи (10) (СЗ ЛДО $A(c)$):

а) все СЗ краевой задачи (10) $\lambda_j(0) \in R_+$;

б) все $\lambda_j(0)$ простые;

в) если при некотором $c = c_0 > 0$ существует СЗ $\lambda_0(c_0) \in R$, то оно положительно.

Первые два замечания выполнены при $c = 0$ — хорошо известные факты из прикладной теории упругости (например, гл. 7 из [15]). Последнее замечание проверяется элементарно. Проинтегрируем уравнение (10), предварительно домножив на $v(x)$:

$$\int_0^1 v^{(IV)} v\,dx + c_0 \int_0^1 v' v\,dx = \lambda_0(c_0) \int_0^1 v^2 dx.$$

Учет краевых условий позволяет заключить, что

$$\int_0^1 v^{(IV)} v\,dx = \int_0^1 (v^{(IV)})^2 dx > 0;\ \ \int_0^1 v' v\,dx = 0{,}5v^2(1) \ge 0$$

и, конечно, $\int_0^1 v^2 dx > 0$. Откуда с необходимостью $\lambda_0(c_0) > 0$. Из последнего замечания вытекает, в частности, что ЛДО $A(c)$ ни при каком c не может иметь СЗ $\lambda = 0$. Иными словами в данной задаче явление дивергенции исключено. Обозначим через $I(c)$ множество тех значений $c \geq 0$, при котором все СЗ ЛДО $A(c')$ положительны и просты при всех $c' \in [0; c]$. Такое множество $I(c)$ не пусто, так как в него входят достаточно малые положительные постоянные c. Положим $c_1 = \sup\limits_{c \in I} c$, т. е. c_1 — это самое малое значение c, при котором могут нарушаться свойства (*а*) и (*б*) (если, конечно, такое возможно). Но тогда данное значение $c = c_1$ характерно тем, что ЛДО $A(c_1)$ имеет положительное кратное СЗ λ_1, а остальные по-прежнему остались положительными и простыми. При $c > c_1$ у $A(c)$ могут появиться комплексно сопряженные СЗ, $c = c_* > c_1$.

Приступим теперь к нахождению c_1. Часть этих построений использует фрагменты работ А.А. Мовчана [см. § 4.9 из [1]], где предложено называть c_1, условной или нижней скоростью флаттера. Решения краевой задачи (10) будем искать в виде

$$v(x) = a_1 \exp(\mu_1 x) + a_2 \exp(\mu_2 x) + \\ + a_3 \exp(\mu_3 x) + a_4 \exp(\mu_4 x), \tag{11}$$

где $a_j \in C(R)$, а μ_j — корни характеристического уравнения

$$\mu^4 + c\mu - \lambda = 0, \tag{12}$$

где $c \geq 0$, $\lambda > 0$.

Учитывая, что в силу теоремы Виета справедливы равенства

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = 0; \\ \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 + \mu_4^2 = 0; \\ \mu_1\mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_2\mu_4 + \mu_1\mu_3\mu_4 + \\ + \mu_2\mu_3\mu_4 = -c < 0, \;\; \mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 < 0, \tag{13}$$

то характеристическое уравнение (12) имеет два комплексных и два действительных корня $\mu_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\mu_{3,4} = -\alpha \pm \sigma$, $\sigma = \sqrt{\beta^2 - 2\alpha^2}$, $\beta > 0$, $\sigma > 0$. Из (13) следует, что

$$c = 4\alpha(\beta^2 - \alpha^2); \; \lambda = (\alpha^2 + \beta^2)(\beta^2 - 3\alpha^2); \\ \beta > \alpha > 0. \tag{14}$$

Подставив (11) в краевые условия (9), для определения постоянных a_1, a_2, a_3, a_4 получим систему из четырех линейных однородных уравнений

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0, \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3 + \mu_4 a_4 = \\ = 0, \mu_1^2 q_1 a_1 + \mu_2^2 q_2 a_2 + \mu_3^2 q_3 a_3 + \mu_4^2 q_4 a_4 = \\ = 0, \; \mu_1^3 q_1 a_1 + \mu_2^3 q_2 a_2 + \mu_3^2 q_3 a_3 + \mu_4^2 q_4 a_4 = 0, \tag{15}$$

где $q_j = \exp(\mu_j)$, $j = 1, 2, 3, 4$. Определитель системы уравнений (15) должен быть равен нулю. Выписывая и раскрывая его, получим характеристическое уравнение, которое связывает вспомогательные неизвестные α и β:

$$P(\alpha, \beta) = 0, \\ P(\alpha, \beta) = \beta\sigma[(3\alpha^2 - \beta^2)ch2\alpha - 4\alpha^2\Lambda] + \\ + 3\alpha^2[(2\alpha\beta\cos\beta + \Lambda\sin\beta)(2\alpha\sigma\, ch\sigma + \Lambda sh\sigma)] + \\ + \beta\sigma[(\Lambda\cos\beta - 2\alpha\beta\sin\beta)(\Lambda ch\sigma + 2\alpha\sigma\, sh\sigma)], \\ \Lambda = (\alpha^2 - \beta^2). \tag{16}$$

Рассмотрим функцию

$$c = Q(\alpha, \beta) = 4\alpha(\beta^2 - \alpha^2), \tag{17}$$

для которой следует найти максимум при наличии связи (16). Рассмотрим функцию Лагранжа $L(\alpha, \beta, s) = Q(\alpha, \beta) + sP(\alpha, \beta)$. Как следствие необходимых условий условного экстремума получаем систему для определения α, β

$$P(\alpha, \beta) = 0, \quad F(\alpha, \beta) = P_\alpha Q_\beta - P_\beta Q_\alpha = 0. \tag{18}$$

Добавим, что из результатов, изложенных в монографии [16], вытекает, что равенство $F(\alpha, \beta) = 0$ может быть получено и как следствие наличия у ЛДО $A(c)$ двукратных СЗ при соответствующем выборе c_1 (см. также [9]). Система уравнений была исследована численно. Этот анализ, в частности, позволил найти пары решений (α_j, β_j), $j = 1, 2, ...$, а также соответствующие c_j, λ_j. Пусть (α_1, β_1) та пара, при которой соответствующее значение c_1 наименьшее из возможных. Оказалось, что

$$\alpha_1 = 1{,}4155; \;\; \beta_1 = 5{,}0899; \;\; c_1 = 135{,}3419; \\ \lambda_1 = 555{,}2962; \; \sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 23{,}5647.$$

Из системы (15) находим подходящие a_j. СФ ЛДО $A(c_1)$ соответствующая может быть записана в виде $e_1(x) = \sum\limits_{j=1}^{4} a_j \exp(\mu_j x)$, где $\mu_{1,2} = \alpha_1 \pm i\beta_1$, $\mu_{3,4} = -\alpha_1 \pm \sigma_1$, $a_{1,2} = -0{,}1603 \pm i0{,}8612$, $a_3 = -0{,}6793$, $a_4 = 1$, а присоединенная функция

$$e_0(x) = \sum_{j=1}^{4} b_j \exp(\mu_j x) + x\sum_{j=1}^{4} c_j \exp(\mu_j x); \\ b_{1,2} = -0{,}0025 \pm i0{,}0008; \;\; b_3 = 0{,}0049; \\ b_4 = 0; \;\; c_{1,2} = 0{,}0016 + i0{,}0008; \\ c_3 = -0{,}0028; \;\; c_4 = -0{,}0013.$$

Отметим, что присоединенную функцию $e_0(x)$ следуетзаписать как решение неоднородной краевой задачи $e_0^{(IV)} + c_1 e_0' - \lambda_1 e_0 = e_1$, $e_0(0) = e_0'(0) = e_0''(1) = e_0''(1) = 0$.

Можно также показать, что существуют такие положительные постоянные c_2, c_3, при которых реализуются внутренние резонансы 1:2 и 1:3. Из второго равенства (14) вытекает, что $\beta^2 = \alpha^2 + \sqrt{4\alpha^2 + \lambda}$ $(\lambda > 0)$. После подстановки β^2 в первое из равенств (14) получаем кубическое уравнение для $y = \alpha^2$ следующего вида

$$y^3 + py + q = 0; \; p = \frac{\lambda}{4}; \; q = -\frac{c^2}{64}. \tag{19}$$

Из формул Кардано для корней кубического уравнения вытекает, что уравнение (19) имеет один положительный корень y, а соответствующее α

$$\alpha = \alpha(\lambda, c) = \sqrt{\Theta^{1/3} - 4\lambda\Theta^{-1/3}};$$

$$\Theta = \Theta(\lambda, c) = c^2/128 + \sqrt{(\lambda/12)^3 + (c^2/128)^2}.$$

Наконец, $\beta = \sqrt{\alpha(\lambda,c)^2 + \sqrt{4\alpha(\lambda,c)^4 + \lambda}}$. Положим теперь $\zeta = c^2/128$; $\eta = \lambda/12$ и из (16) получим эквивалентное ему уравнение

$$P_0(\zeta, \eta) = P(\alpha(\lambda, c); \beta(\lambda, c)) = 0. \qquad (20)$$

Пусть при некотором $c = c_2 > 0$ у краевой задачи (8), (9) реализуется внутренний резонанс 1:2. Тогда у ЛДО $A(c_2)$ есть положительные СЗ λ_1, λ_2, для которых справедливо соотношение $\lambda_2 = 4\lambda_1$. Последнее означает, что соответствующий набор можно найти из решения системы (20)

$$P_0(\zeta, \eta) = 0;\ P_0(\zeta, 4\eta) = 0. \qquad (21)$$

Пусть (ζ_j, η_j) одно из ее решений. Для нашей задачи представляет интерес та пара (ζ_j, η_j), где компоненты ζ_j положительная и наименьшая. Пусть (ζ_1, η_1) такая пара. Тогда $c_2 = \sqrt{128\zeta_1}$; $\lambda_1 = 12\eta_1$; $\lambda_2 = 48\lambda_1$. Численный анализ системы (21) показал, что соответствующие значения $c_2 = 54{,}825$, $\lambda_1 = 146{,}3201$, $\lambda_2 = 4\lambda_1 = 585{,}282$, а $\sigma_1 = 12{,}096$, $\sigma_2 = 24{,}193$. При этом, как можно убедиться, проделав стандартные вычисления, что СФ ЛДО $A(c_2)$, отвечающие СЗ λ_j ($j = 1, 2$) имеют вид

$$e_j(x) = \sum_{k=0}^{4} a_{jk} \exp(\mu_{jk}),$$
$$j = 1,2,\ a_{11} = (-0{,}516 + i0{,}126),$$
$$a_{12} = \overline{a_{11}},\ a_{13} = 1,\ a_{14} = 0{,}032,$$
$$a_{21} = (-0{,}4810 - i0{,}622),\ a_{22} = \overline{a_{21}},$$
$$a_{23} = -0{,}038,\ a_{24} = 1{,}000,$$
$$\mu_{11} = \alpha_1 + i\beta_1,\ \mu_{12} = \overline{\mu_{11}},$$
$$\mu_{21} = \alpha_2 + i\beta_2,\ \mu_{22} = \overline{\mu_{21}},$$
$$\mu_{23} = -\alpha_2 + \sqrt{\beta_2^2 - 2\alpha_2^2},\ \mu_{24} = -\alpha_2 + \sqrt{\beta_2^2 - 2\alpha_2^2},$$
$$\alpha_1 = 1{,}103,\ \beta_1 = 3{,}685,\ \alpha_2 = 0{,}566,\ \beta_2 = 4{,}952.$$

Аналогично может быть рассмотрен вопрос о нахождении такого значения $c = c_3$, при котором реализуется внутренний резонанс 1:3. В иных терминах при данном $c = c_3$ ЛДО $A(c_3)$ имеет СЗ λ_1, $\lambda_2 = 9\lambda_1$ ($\lambda_1 > 0$). Как и в предыдущем случае, задачу можно свести к системе уравнений, аналогичной (21):

$$P_0(\zeta, \eta) = 0;\ P_0(\zeta, 9\eta) = 0. \qquad (22)$$

Откуда сначала находим подходящую пару решений (ζ_*, η_*), а затем и

$$c_3 = 21{,}116;\ \lambda_1 = 58{,}504;\ \lambda_2 = 9\lambda_1 = 526{,}536.$$

При рассмотрении задач, связанных с резонансами 1:2, 1:3, все результаты численного анализа приведены с точностью до трех знаков после запятой. При численном исследовании систем уравнений (21), (22), а также (18) были использованы стандартные методы их решения. После графической локализации корней, для их уточнения использовалась одна из версий метода Зейделя [§ 4 из гл. 7 [17]]. Численный анализ систем был выполнен аспирантами Толбей А.О., Пилипенко Г.В.

В заключение этого раздела отметим, что ЛДО, определенный равенством $A^*(c)v = v^{(IV)} - cv'$, где достаточно гладкая функция $\nu(x)$ удовлетворяет краевым условиям $\nu(0) = \nu'(0) = \nu''(1) = 0$, $\nu'''(1) = c\nu(1)$, является сопряженным к ЛДО$A(c)$ [16].

Бифуркационные задачи. В данном разделе будем считать, что $g << 1$ и положим $g = 2\varepsilon$, где будем интерпретировать ε как малый положительный параметр. Будем считать, что приведенная скорость $c = c_j + \Delta_j$, где опять $|\Delta_j| << 1$. При этом удобно считать, что $\Delta_1 = a_1\varepsilon^2$, а $\Delta_2 = a_2\varepsilon$, $\Delta_3 = a_3\varepsilon$, $a_1, a_2, a_3 \in R$. Это означает, что рассматриваются три нелинейные задачи

$$\begin{gathered} u_{tt} + 2\varepsilon u_t + A(c)u = F_2(u) + F_3(u); \\ u\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=0} = u_{xx}\big|_{x=1} = u_{xxx}\big|_{x=1} = 0, \end{gathered} \qquad (23)$$

где $F_2(u) = -p_2(au_t + bu_x)^2$; $F_3(u) = 6u_{xx}\int_0^1 (u_x)^2 - p_3(au_t + bu_x)^3$.

В уравнении (23) коэффициент с выбран одним из способов, предложенных в начале этого раздела. Так, при выборе $c = c_1 + a_1\varepsilon^2$ (задача 1) получаем задачу, когда для частот реализуется случай, близкий к резонансу 1:1. При $c = c_2 + a_2\varepsilon$ — случай, близкий к резонансу 1:2 (задача 2), и, наконец, при $c = c_2 + a_3\varepsilon$ — случай, близкий к резонансу 1:3 (задача 3).

Из результатов работ [18—19] вытекает, что у каждой из этих задач существует по крайней мере одно неустойчивое периодическое решение, амплитуда которого величина порядка ε, если речь идет о задаче 1 и 2. При рассмотрении задачи 3 амплитуда неустойчивого периодического решения имеет порядок $\varepsilon^{1/2}$.

Поясним это более детально на примере краевой задачи (23) в случае, когда $c = c_2 + a_2\varepsilon$. В остальных случаях для отыскания периодических решений используется аналогичный метод с соответствующими модификациями. Используемый метод принято называть методом нормальных форм (НФ) в смысле Пуанкаре—Дюлака. Ее исследование может быть сведено к исследованию системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений в C^2 (для двух комплекснозначных функций). Алгоритм сведения — модифицированный метод Крылова—Боголюбова (например, [8, 9, 14, 18, 19]). Будем искать решения нелинейной краевой задачи (23) ($c = c_2 + a_2\varepsilon$) в следующем виде

$$u(t,x,\varepsilon)=\varepsilon u_1(t,x)+\varepsilon^2 u_2(t,x)+o(\varepsilon^2), \quad (24)$$

где $u_1(t, x) = (z_1(t)\exp(i\sigma_1 t) + \bar{z}_1(t)\exp(-i\sigma_1 t))e_1(x) +(z_2(t)\exp(i\sigma_2 t) +\bar{z}_2(t)\exp(-i\sigma_2 t))e_2(x)$, $\sigma_2 = 2\sigma_1$, $e_1(x)$, $e_2(x)$ — СФ ЛДО $A(c_2)$, отвечающие СЗ $\lambda_1=\sigma_1^2$, $\lambda_2 = 2\lambda_1 = 4\sigma_1^2$. Комплекснозначные функции z_1, z_2 и действительная функция u_2 подлежат определению. При этом удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$z_1'=\varepsilon\Psi_1(z_1,z_2)+O(\varepsilon^2);\ z_2'=\varepsilon\Psi_2(z_1,z_2)+O(\varepsilon^2). \quad (25)$$

Подстановка суммы (24) в (23) с последующем приравниванием коэффициентов при ε^2, а также учет уравнений системы (25) приводят к формированию неоднородной краевой задачи для определения $u_2 = u_2(t, x)$

$$\begin{gathered}u_{tt}+A(c_2)u_2=-2[\psi_1 i\sigma_1\exp(i\sigma_1 t)-\\ \bar{\psi}_1 i\sigma_1\exp(-i\sigma_1 t)]e_1(x)-2[\psi_2 i\sigma_2\exp(i\sigma_2 t)-\\ -\bar{\psi}_2 i\sigma_2\exp(-i\sigma_2 t)]e_2(x)-2[z_1 i\sigma_1\exp(i\sigma_1 t)-\\ -\bar{z}_1 i\sigma_1\exp(-i\sigma_1 t)]e_1(x)-2[z_2 i\sigma_2\exp(i\sigma_2 t)-\\ \bar{z}_2 i\sigma_2\exp(-i\sigma_2 t)]e_2(x)+a_2u_{1x}+F_2(u_1),\end{gathered} \quad (26)$$

$$u_2\big|_{x=0}=u_{2x}\big|_{x=0}=u_{2xx}\big|_{x=1}=u_{2xxx}\big|_{x=1}=0. \quad (27)$$

Обозначим через $G(t, x)$ правую часть неоднородного уравнения (26). По переменной t она имеет период $2\pi/\sigma_1$ ($\sigma_2=2\sigma_1$). Пусть $h_1(x)$, $h_2(x)$ СФ ЛДО $A^*(c_2)$, отвечающие СЗ λ_1, $\lambda_2 = 4\lambda_1$ ($\lambda_1=\sigma_1^2$, $\lambda_2=4\sigma_1^2$). Как известно [16], краевая задача (26), (27) имеет $2\pi/\sigma_1$ t периодическое решение, если выполнены равенства

$$\int_0^{2\pi/\sigma_1}\int_0^1 G(t,x)\exp(\pm i\sigma_j t)h_j(x)dxdt=0,\ j=1,2. \quad (28)$$

При анализе краевой задачи (26), (27) временно считаем z_1, z_2 параметрами. Из условий разрешимости удается найти «главную» часть системы (25), которую и принято в качественной теории дифференциальных уравнений называть НФ. После перенормировок и элементарных преобразований (например, [14, 18]) главную часть системы (26) удается переписать в виде

$$\begin{aligned}&\rho_1'=\varepsilon[-\rho_1+\rho_1\rho_2(\Theta+\Delta)],\rho_2'=\varepsilon[-\rho_2+\rho_1^2(\Theta-\Delta)];\\ &\Theta'=\varepsilon[a_0-(\rho_1^2/(\rho_2))\sin(\Theta-\Delta)-2\rho_2\sin(\Theta+\Delta)],\end{aligned} \quad (29)$$

где $a_0, \Delta\in R$ и определяются через коэффициенты НФ для z_1, z_2 с помощью равенств (29), $z_1 = \gamma_1\rho_1(t)\exp(i\psi_1(t) + i\delta_1)$, $z_2 = \gamma_2\rho_2(t)\exp(i\psi_2(t) + i\delta_2)$. Здесь $\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2 \in R$, $\Theta(t) = \psi_2(t) - 2\psi_1(t)$. Нетрудно отметить, что «главная» часть нормальной формы «практически» не зависит от коэффициентов исходной задачи. От них зависит выбор γ_1, γ_2, δ_1, δ_2. Если исключить «особый» случай, когда $\Delta = \pi/2$ и который реализуется при исключительном сочетании коэффициентов исходного уравнения (23), то из результатов работы [14, 18] вытекает, что система (29) имеет одно седловое (неустойчивое) состояние равновесия и ему соответствует неустойчивый цикл краевой задачи (23), а значит, для ее решений может реализоваться жесткий (докритический) режим возбуждения колебаний, а граница устойчивости в данной задаче всегда опасная [20]. Аналогичная картина реализуется и при остальных вариантах выбора $c \approx c_j$. Отметим, что так как периодические решения каждый раз неустойчивы и, следовательно, физически нереализуемы, то точные или приближенные их параметры восстанавливать нет необходимости.

Заключение. Подчеркнем, что из результатов этой работы, а также работ [8–14] вытекает, что флаттер может реализоваться при скоростях значительно меньших, чем скорость флаттера c_* в традиционном ее понимании. Последнее неоднократно наблюдалось при экспериментах [1]. Объяснение разницы между теоретическим анализом и данными эксперимента обычно ищут в «недостаточной» точности учета различных факторов в стандартных моделях. Например, в приближенном характере закона плоских сечений. В данной работе показано, что $c_2/c_* < c_2/c_1 \approx 2{,}5$, а $c_3/c_* < c_3/c_1 \approx 6{,}4$. Поэтому маловероятно, что уточнение закона плоских сечений позволит приблизить значение скорости флаттера c_* к пороговой скорости c_2 или c_3.

Список обозначений

l — длина;
h — толщина пластинки;
D —цилиндрическая жесткость;
E —модуль упругости;
U — скорость потока газа;
c_∞ — скорость звука;
$M=\dfrac{U}{c_\infty}$ — число Маха;
ρ — плотность материала пластинки;
χ — показатель политропы;
υ — коэффициент Пуассона;
p_∞ — давление невозмущенного газа;
$w(t, x)$, $u(t, x)$ — прогиб серединной поверхности;
u_t, u_{xxxx}, u_{tt} — частные производные $u(t, x)$ — $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ соответственно.

Список литературы

1. Болотин, В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости / В.В. Болотин. — М.: Физматлит, 1961. — 337 с.
2. Гукенхеймер, Дж. Нелинейные колебания динамических систем и бифуркации векторных полей / Дж. Гукенхеймер, Ф. Холмс. — М.: Ижевск: Ин-т компьютерных исслед, 2002. — 559 с.
3. Вольмир, А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа / А.С. Вольмир. — М.: Наука, 1979. — 320 с.
4. Куликов, А.Н. О новом подходе к исследованию задач нелинейного панельного флаттера / А.Н. Куликов, Б.Д. Либерман // Вестн. Яросл. ун-та. — Ярославль, 1976. — С. 118–133.

5. Dowell, E.H. Flutter of a buckled plate as an example of chaotic motion of a deterministic autonomous system / E.H. Dowell // J. Sound. — Vib. Vol. 85, № 3. — Pp. 333–344.
6. Nonlinear panel flutter is renote post-critical domains / V.V. Bolotin [et al.] // J. Nonlinear Mechanics. — 1998. — Vol. 33, № 5. — Pp. 753–764.
7. Об одной математической задаче теории упругой устойчивости / В.С. Колесов [и др.] // ПММ. — 1978. — Т. 42, № 3. — С. 458–465.
8. Куликов, А.Н. Жесткое возбуждение колебаний характерно для флаттера при малом коэффициенте демпфирования / А.Н. Куликов // Изв. РАЕН. Диффер. уравнения. — 2006. — Т. 29, № 11. — С. 131–134.
9. Куликов, А.Н. Бифуркации автоколебаний пластинки при малом коэффициенте демпфирования в сверхзвуковом потоке газа / А.Н. Куликов // ПММ. — 2009. — Т. 73, № 2. — С. 271–281.
10. Куликов, А.Н. Резонанс 1:3 – одна из возможных причин нелинейного панельного флаттера / А.Н. Куликов // ЖВМиМФ. — 2011. — Т. 51, № 7. — С. 1266–1279.
11. Куликов, А.Н. Нелинейный панельный флаттер: опасность жесткого возбуждения колебаний / А.Н. Куликов // Изв. РАЕН. Диффер. уравнения. — 1992. — Т. 28, № 6. — С. 1080–1082.
12. Бекбулатова, А.О. Резонанс 1:2 как источник жесткого возбуждения колебаний / А.О. Бекбулатова, А.Н. Куликов // Совр. проблемы математ. и информат. — 2002. — № 5. — С. 22–27.
13. Куликов, А.Н. Нелинейный панельный флаттер. Резонанс собственных частот-одна из возможных причин жесткого возбуждения колебаний / А.Н. Куликов // Вестн. Нижегород. ун-та. — 2011. — Т. 4. — С. 193–194.
14. Kulikov, A.N. Resonance of proper frequency 1:2 as a reason for hard excitation of oscillations of the plate ultrasonic gas / A.N. Kulikov // Тр. междунар. конгресса ENOC-2008. Russia. Saint-Petersburg. — 2008. — Pp. 1636–1643.
15. Бабаков, И.М. Теория колебаний / И.М.Бабаков. — М.: Наука, 1968. — 559 с.
16. Неймарк, М.А. Линейные дифференциальные операторы / М.А. Неймарк. — М.: Наука, 1969. — 528 с.
17. Бахвалов, Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов. — М.: Наука, 1973. — 632 с.
18. Куликов, А.Н. Бифуркации малых периодических решений в случае близком к резонансу 1:2 для одного класса нелинейных эволюционных уравнений / А.Н. Куликов // Динамич. системы. — 2012. — Т. 2(30), № 3–4. — С. 241–258.
19. Куликов, А.Н. Резонансная динамика как причина жесткого возбуждения колебаний в некоторых задачах теории упругой устойчивости / А.Н. Куликов // Динамич. системы. — 2013. — № 1–2. — С. 49–68.
20. Баутин, Н.Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. — М.: Наука, 1990. — 488 с.

Kulikov A.N.

Alternative variant for the explication the reason for hard excitations of oscillations in the problem of the nonlinear panel flutter

A well know problem of oscillations for plate in ultrasonic gas flow in considered if the damping coefficient is sufficiently small. It is shown that the resonances 1:1, 1:2, 1:3 of proper frequencies lead to the appearance of unstable oscillations for those velocities of the flow for which the state of equilibrium remains stable. The investigation of the nonlinear value boundary problems does not use Galerkin's method.

Keywords: *nonlinear panel flutter, value boundary problem, stability, resonances, hard excitation of oscillations, bifurcations*

Поступила в редакцию 15.10.2013.