



# МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.375

Ф.Ф. ГАСАНОВ, канд. техн. наук  
Азербайджанский технический университет, г. Баку

## ЗАРОЖДЕНИЕ ТРЕЩИНЫ В КОМПОЗИТЕ, АРМИРОВАННОМ ОДНОНАПРАВЛЕННЫМИ ОРТОТРОПНЫМИ ВОЛОКНАМИ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ СДВИГЕ

*Рассматривается задача механики разрушения о взаимодействии ортотропных упругих включений, поверхность которых равномерно покрыта однородной пленкой, и прямолинейных зон предразрушения со связями между берегами коллинеарных осей абсцисс и ординат в изотропной плоскости. Предложена модель зарождения трещин в композитах с периодической структурой, основанная на рассмотрении зоны трещинообразования. Принято, что зона трещинообразования представляет собой слой конечной длины, содержащий материал с частично нарушенными связями между отдельными структурными элементами. Наличие связей между берегами зоны предразрушения (зоны ослабленных межчастичных связей материала) моделируется приложением к поверхности зоны предразрушения сил сцепления, вызванных присутствием связей. Анализ предельного равновесия в композите, при котором происходит появление трещины, выполняется на основе критерия критического сдвига связей материала.*

**Ключевые слова:** ортотропные упругие включения, зона предразрушения, продольный сдвиг, перфорированная плоскость, силы сцепления, зарождение трещины

**Введение.** Задача о зарождении трещины является важной проблемой теории прочности [1–3]. Следует отметить, что в настоящее время актуальны [4–6] периодические задачи механики разрушения. Постановка задачи о зарождении трещины существенно расширяет первоначальную концепцию А. Гриффитса, согласно которой в материале всегда имеется большое количество мельчайших трещин. Зарождение трещин под нагрузкой соответствует данным фрактографических наблюдений.

Был рассмотрен ряд работ [7–15] по моделированию трещиностойкости композиционных материалов и адгезионных соединений.

Интерес к исследованию трещинообразования в композитах напрямую связан с проектированием новых высокопрочных материалов. В связи с этим разработка математических моделей зарождения трещин в композитах весьма актуальна. Актуальность таких исследований вызвана широким использованием в технике конструкций и изделий из композиционных материалов. Исследования по разработке математических моделей теоретически описываемого напряженно-деформируемого состояния армированного композита вблизи включения при сдвиге и зарождения трещин практически отсутствуют.

Цель работы состоит в разработке новой математической модели зарождения трещин сдвига в композите.

**Постановка задачи.** Пусть имеется изотропная упругая плоскость, ослабленная периодической системой круговых отверстий, имеющих радиусы  $\lambda$  ( $\lambda < 1$ ) и центры в точках  $P_m = m\omega$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ),  $\omega = 2$ . То, что  $\omega = 2$ , не принципиально, так как всегда можно простым преобразованием получить соответствующие функции для любого  $\omega$ . Здесь вместо  $z = x + iy$  используются безразмерные переменные  $2z/\omega_0$ , которые обозначаются той же буквой  $z$ ,  $\omega_0$  — размерная длина, равная расстоянию между центрами соседних включений.

Круговые отверстия плоскости заполнены шайбами без натяга из ортотропного упругого материала, поверхность которых равномерно покрыта однородной пленкой. Рассматриваемая плоскость подвергнута сдвигу усилиями  $\tau_y = \tau_y^\infty$ ,  $\tau_x = 0$  (сдвиг на бесконечности). По мере возрастания внешней нагрузки  $\tau_y^\infty$  в такой среде вокруг отверстий образуются зоны повышенных напряжений, расположение которых имеет периодический характер. В зонах повышенных напряжений могут возникать трещины. На основании симметрии краевых условий и геометрии области  $D$ , занятые

средой напряжения, являются периодическими функциями с основным периодом  $\omega$ . При деформации кусочно-однородного составного тела в случае идеального контакта смежные точки контуров на границе «включение–покрытие», а также «покрытие–плоскость» будут иметь одинаковые перемещения и напряжения.

По мере увеличения внешней нагрузки в теле вокруг отверстий будут возникать зоны предразрушения. Используется модель зоны предразрушения со связями между берегами. Зоны предразрушения моделируются областями с ослабленными межчастичными связями в материале среды. Взаимодействие берегов этих зон моделируется путем введения между берегами зоны предразрушения связей с заданной диаграммой деформирования. Физическая природа таких связей и размеры зон предразрушения зависят от вида материала.

При действии внешней нагрузки на составное тело в связях, соединяющих берега зон предразрушения, возникают сдвиговые напряжения  $q_y(x)$  и  $q_x(y)$  соответственно. Эти напряжения заранее неизвестны и подлежат определению в процессе решения краевой задачи механики разрушения.

Выражаем напряжения и смещение  $w$  через аналитическую функцию [16]

$$\tau_x - i\tau_y = f'(z); \quad w = \frac{1}{\mu} \operatorname{Re} f(z),$$

где  $\mu$  — постоянная материала среды;  $i = \sqrt{-1}$ .

Краевые условия поставленной задачи запишем в виде

$$\left(1 + \frac{\mu_b}{\mu_r}\right) f_b(\tau_1) + \left(1 - \frac{\mu_b}{\mu_r}\right) \overline{f_b(\tau_1)} = 2f_i(\tau_1); \quad (1)$$

$$\left(1 + \frac{\mu_r}{\mu_s}\right) f_r(\tau) + \left(1 - \frac{\mu_r}{\mu_s}\right) \overline{f_r(\tau)} = 2f_s(\tau); \quad (2)$$

$$f'_s(t) - \overline{f'_s(t)} = f_x(t); \quad f'_s(t_1) - \overline{f'_s(t_1)} = f_y(t_1), \quad (3)$$

где  $\tau = \lambda e^{i\theta} + m\omega$ ;  $\tau_1 = (\lambda - h)e^{i\theta} + m\omega$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ );  $h$  — толщина покрытия;  $\theta$  — полярный угол;  $t$  и  $t_1$  — аффиксы точек берегов зон предразрушения, направленных по осям абсцисс и ординат, соответственно.

Величины, относящиеся к покрытию, шайбе и плоскости, в дальнейшем обозначаются соответственно индексами  $t$ ,  $b$  и  $s$ :

-  $f_x(t) = -2iq_y(t)$  — на берегах зон предразрушения коллинеарных оси абсцисс;

-  $f_y(t_1) = -2iq_x(t_1)$  — на берегах зон предразрушения коллинеарных оси ординат.

Основные соотношения рассматриваемой задачи дополняются соотношениями, связывающими смещение берегов зон предразрушения и усилия в связях. Без потери общности эти соотношения представим в виде

$$w^+(x, 0) - w^-(x, 0) = C(x, q_y(x))q_y(x); \quad (4)$$

$$w^+(0, y) - w^-(0, y) = C(y, q_x(y))q_x(y), \quad (5)$$

где функции  $C(x, q_y(x))$  и  $C(y, q_x(y))$  представляют собой эффективные податливости связей;  $(w^+ - w^-)$  — сдвиг берегов зон предразрушения.

**Решение краевой задачи.** Решение краевой задачи ищем в виде [16, 17]

$$f_s(z) = f_1(z) + f_2(z) + f_3(z); \quad (6)$$

$$f_b(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} \frac{z^{2k+1}}{2k+1}; \quad f_r(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{2k} z^{2k+1}; \quad (7)$$

$$f'_1(z) = F_1(z) = \tau_y^{\infty} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!}; \quad (8)$$

$$F_2(z) = \frac{1}{i\omega} \int_{L_1} g(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (t-z) dt; \quad (9)$$

$$F_3(z) = \frac{1}{i\omega} \int_{L_2} g_1(t_1) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (it_1 - z) dt_1,$$

где интегралы в (9) берутся по линиям  $L_1 = \{[-\ell, -a] + [a, \ell]\}$ ;  $L_2 = \{[-r, -b] + [b, r]\}$ ;

$\rho(z) = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi z}{\omega}} - \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2$ ;  $g(t)$ ,  $g_1(t_1)$  — искомые

функции, характеризующие сдвиг берегов зон предразрушения:

$$g(x) = \frac{\mu_s}{2} \frac{d}{dx} [w^+(x, 0) - w^-(x, 0)] \quad \text{на } L_1;$$

$$g_1(y) = \frac{\mu_s}{2} \frac{d}{dy} [w^+(0, y) - w^-(0, y)] \quad \text{на } L_2.$$

К основным представлениям (6)–(9) добавляются дополнительные условия, вытекающие из физического смысла задачи

$$\int_{-\ell}^{-a} g(t) dt = 0; \quad \int_a^{\ell} g(t) dt = 0; \quad (10)$$

$$\int_{-r}^{-b} g_1(t_1) dt_1 = 0; \quad \int_b^r g_1(t_1) dt_1 = 0.$$

Введем обозначения [18]

$$z_3 = x + \mu_3 y; \quad \mu_3 = \alpha_3 + i\beta_3; \quad \bar{\mu}_3 = \alpha_3 - i\beta_3$$

( $\beta > 0$ ) комплексный параметр.

Задача об антиплоской деформации (сложный сдвиг) анизотропного тела сводится [18] к такой же задаче для изотропного тела, у которого поперечное сечение определяется путем аффинного преобразования

$$z_3 = x_3 + iy_3; \quad x_3 = x + \alpha_3 y; \quad y_3 = \beta_3 y;$$

$$x = x_3 - (\alpha_3/\beta_3) y_3; \quad y = (1/\beta_3) y_3.$$

Рассмотрим случай ортотропного включения. Направляя оси  $x$  и  $y$  нормально к плоскостям упругой симметрии, запишем уравнения обобщенно-закона Гука следующим образом

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{\mu_1} \tau_{yz}; \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{\mu_2} \tau_{xz},$$

где  $\mu_1, \mu_2$  — модули сдвига для плоскостей  $yz$  и  $xz$ ;  $\mu_1 = 1/a_{44}$ ;  $\mu_2 = 1/a_{55}$ ;  $a_{45} = 0$ .

Задачу о продольном сдвиге ортотропного тела можно свести к задаче для изотропного тела несколькими способами, используя замену переменных. Одна из таких замен имеет вид

$$x = x_3 \sqrt{\frac{2\varphi}{1+\varphi}}; \quad y = y_3 \sqrt{\frac{2}{1+\varphi}}; \quad \varphi = \frac{a_{44}}{a_{55}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}.$$

Неизвестные функции  $g(x)$  и  $g_1(y)$ , и коэффициенты  $a_{2k}, b_{2k}, \alpha_{2k}$  должны быть определены из краевых условий (1)–(3). Для составления уравнений относительно неизвестных коэффициентов преобразуем краевое условие (2) к виду

$$\left(1 + \frac{\mu_t}{\mu_s}\right) f_t(\tau) + \left(1 - \frac{\mu_t}{\mu_s}\right) \overline{f_t(\tau)} = 2[f_1(\tau) + f_2(\tau) + f_3(\tau)]. \quad (11)$$

Относительно функций  $f_2(\tau)$  и  $f_3(\tau)$  будем считать, что они разлагаются на контуре  $|\tau| = \lambda$  в ряды Фурье.

Для вывода разрешающих уравнений подставим в граничные условия (1)–(2) вместо функций  $f_b(z), f_t(z), f_1(z)$  их разложения в ряды Лорана в окрестности нулевой точки, а вместо  $f_2(z)$  и  $f_3(z)$  — ряды Фурье на контуре  $|\tau| = \lambda$  и, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\exp(i\theta)$  в обеих частях краевых условий, получим после некоторых преобразований совокупность бесконечных систем линейных алгебраических уравнений:

$$b_{2k} = \left(1 + \frac{\mu_b}{\mu_t}\right) a_{2k} \frac{\lambda_3^{2k+1}}{2(2k+1)\lambda^{2k+1}}; \quad (12)$$

$$b_{-2k-2} = \left(1 + \frac{\mu_b}{\mu_t}\right) \overline{a_{2k}} \frac{(\lambda-h)^{4k+2} \lambda_3^{-2k-1}}{2(2k+1)\lambda^{-2k-2}};$$

$$\frac{\lambda_3 a_0}{4\lambda} (g_1 + f^2 h_1) = \tau_y^\infty + c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k+2} \lambda^{2k+2} r_{0,k}; \quad \frac{\lambda_3 \overline{a_0}}{4} [h_2 f^2 + g_2] = -\alpha_2;$$

$$\frac{\lambda_3^{2k+1} a_{2k}}{4\lambda^{2k+1}} (g_1 + f^{4k+2} h_1) = \alpha_2 \lambda^2 r_{0,1} + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{2p+2} \lambda^{2p+2} r_{p,k} + \frac{c_{2k}}{\lambda^{2k}};$$

$$\frac{\lambda_3^{2k+1} \overline{a_{2k}} \lambda^{2k}}{4\lambda^{2k+1}} (g_2 + f^{4k+2} h_2) = -\alpha_{2k+2},$$

где

$$g_1 = \left(1 + \frac{\mu_b}{\mu_t}\right) \left(1 + \frac{\mu_t}{\mu_s}\right); \quad g_2 = \left(1 + \frac{\mu_b}{\mu_t}\right) \left(1 - \frac{\mu_t}{\mu_s}\right);$$

$$h_1 = \left(1 - \frac{\mu_t}{\mu_s}\right) \left(1 - \frac{\mu_b}{\mu_t}\right); \quad h_2 = \left(1 + \frac{\mu_t}{\mu_s}\right) \left(1 - \frac{\mu_b}{\mu_t}\right);$$

$$r_{p,k} = \frac{(2p+2k+1)! g_{p+k+1}^*}{(2p)!(2k+1)! 2^{2p+2k+1}}; \quad f = \frac{\lambda-h}{\lambda}; \quad c_{2k} = c'_{2k} + c''_{2k};$$

$$c'_{2k} = -\frac{1}{\omega i} \int_{L_1} g(t) f_{2k}(t) dt \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$

$$c''_{2k} = -\frac{1}{\omega i} \int_{L_2} g_1(t_1) \Phi_{2k}(it_1) dt_1;$$

$$f_{2k}(t) = \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \gamma^{(2k)}(t) - \frac{\lambda^{2k+2}}{(2k+1)!} \gamma^{(2k+2)}(t); \quad \gamma(t) = ctg \frac{\pi}{\omega} t;$$

$$\Phi_{2k}(it_1) = \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \gamma_1^{(2k)}(it_1) - \frac{\lambda^{2k+2}}{(2k+1)!} \gamma_1^{(2k+2)}(it_1);$$

$$\gamma_1(it_1) = ctg \frac{\pi}{\omega} it_1; \quad g_{p+k+1}^* = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2(p+k+1)}};$$

$$g = \frac{a_{44}}{a_{55}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}; \quad \lambda_3 = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{2g}{1+g}\right)^2 + \left(\frac{2}{1+g}\right)^2}; \quad r_{0,0} = 0.$$

Требую теперь, чтобы функции (6)–(9) удовлетворяли граничному условию на берегах зон предразрушения, получим систему двух сингулярных интегральных уравнений относительно  $g(x)$  и  $g_1(y)$ :

$$\frac{1}{\pi} \int_{L_1} g(t) ctg \frac{\pi}{\omega} (t-x) dt - \text{Im}[F_*(x)] = q_x(x) \quad \text{на } L_1; \quad (13)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{L_2} g_1(t_1) cth \frac{\pi}{\omega} (t_1-y) dt_1 - \text{Im}[F_{**}(y)] = q_y(y) \quad \text{на } L_2; \quad (14)$$

$$F_*(x) = F_1(x) + F_3(x); \quad F_{**}(y) = F_1(y) + F_2(y).$$

Бесконечные алгебраические системы (12) совместно с сингулярными интегральными уравнениями (13)–(14) и соотношениями (4)–(5) являются основными разрешающими уравнениями задачи, позволяющими определить  $g(x)$ ,  $g_1(y)$  и коэффициенты  $a_{2k}, b_{2k}, \alpha_{2k}$ . Алгебраические системы (12) и интегральные уравнения (13)–(14) оказались связанными и должны решаться совместно. После определения комплексных потенциалов  $f_s(z), f_b(z)$  и  $f_t(z)$  можно найти напряженно-деформированное состояние кусочно-однородной среды.

Величины, характеризующие длину зон предразрушения, входят в разрешающие уравнения как неизвестные параметры, подлежащие определению. Так как в составном теле напряжения ограничены, то решение каждого сингулярного интегрального уравнения (13), (14) следует искать в классе всюду ограниченных функций (напряжений).

Воспользовавшись разложением функции  $ctg \frac{\pi}{\omega}(z)$  и  $cth \frac{\pi}{\omega}(z)$  в основной полосе периодов, а также учитывая, что  $g(x) = -g(-x)$ ,  $g_1(y) = -g_1(-y)$  и применяя замену переменных, интегральные уравнения (13)–(14) приведем к стандартной форме. Использование квадратурных формул [19, 20] по-

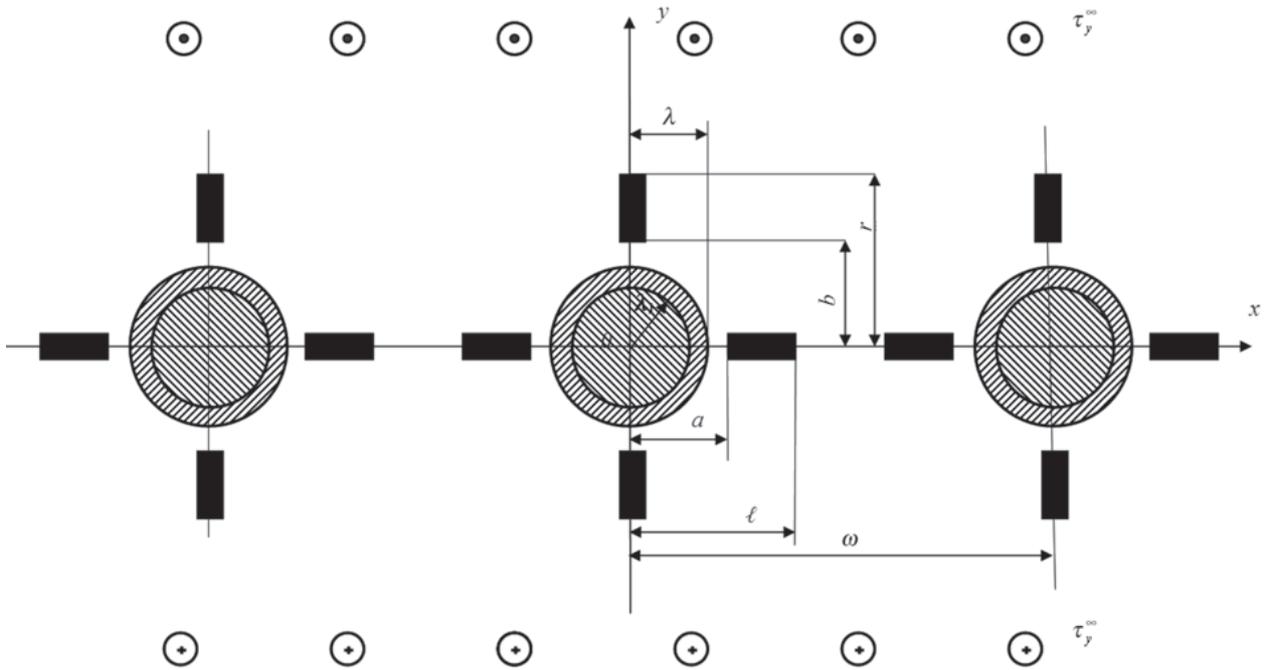


Рисунок 1 — Расчетная схема задачи механики разрушения о зарождении трещины в композите, армированном однонаправленными ортотропными волокнами

звolyает заменить основные разрешающие уравнения (13)–(14) двумя конечными алгебраическими уравнениями относительно приближенных значений  $p_k^0$ ,  $R_v^0$  искомых функций в узловых точках

$$\sum_{k=1}^n a_{m,k} p_k^0 - \frac{1}{2} \operatorname{Im} [F_*(\eta_m)] = q_y(\eta_m) \quad (m = 1, 2, \dots, M-1); \quad (15)$$

$$\sum_{v=1}^n a_{m,v}^* R_v^0 - \frac{1}{2} \operatorname{Im} [F_{**}(\eta_m)] = q_x(\eta_m), \quad (16)$$

где

$$a_{m,k} = \frac{1}{2M} \left[ \frac{1}{\sin \theta_m} \operatorname{ctg} \frac{\theta_m + (-1)^{|m-k|} \theta_k}{2} + B(\eta_m, \tau_k) \right];$$

$$a_{m,v}^* = \frac{1}{2M} \left[ \frac{1}{\sin \theta_m} \operatorname{ctg} \frac{\theta_m + (-1)^{|m-v|} \theta_v}{2} + B_*(\eta_m, \tau_v) \right].$$

К системам (15)–(16) необходимо добавить дополнительные условия (10), которые в дискретной форме принимают вид

$$\sum_{k=1}^M \frac{p_k^0}{\sqrt{1/2(1-\lambda_1^2)(\tau_k+1)+\lambda_1^2}} = 0;$$

$$\sum_{v=1}^M \frac{R_v^0}{\sqrt{1/2(1-\lambda_2^2)(\tau_v+1)+\lambda_2^2}} = 0. \quad (17)$$

Системы (15)–(17) являются связанными с бесконечными алгебраическими системами (12), в которых вместо коэффициентов  $C_{2k}$  подставлено квадратное соотношение.

В правую часть полученных систем (15)–(17) входят неизвестные значения напряжений  $q_y(\eta_m)$ ,  $q_x(\eta_m)$  в узловых точках, принадлежащих конечным

зонам соответствующих зон предразрушения. Неизвестные напряжения в связях  $q_y(\eta_m)$  и  $q_x(\eta_m)$ , возникающие на берегах конечных зон  $L_1$  и  $L_2$  соответственно, определяются из дополнительных условий (4)–(5). Используя построенное решение, уравнения (4)–(5) представим в виде

$$\frac{d}{dx} [C(x, q_y(x)) q_y(x)] = \frac{2}{\mu_s} g(x); \quad (18)$$

$$\frac{d}{dy} [C(y, q_x(y)) q_x(y)] = \frac{2}{\mu_s} g_1(y). \quad (19)$$

Требую выполнения условий (18) и (19) в узловых точках, принадлежащих конечным зонам  $L_1$  и  $L_2$  соответственно, получим еще две системы из  $M_1$  и  $M_2$  уравнений, каждая для определения значений  $q_y(\eta_{m1})$  и  $q_x(\eta_{m2})$  ( $m_1 = 1, 2, \dots, M_1$ ;  $m_2 = 1, 2, \dots, M_2$ ). При этом используется метод конечных разностей. Так как в составном кусочно-однородном теле напряжения ограничены, то решение сингулярных интегральных уравнений следовало бы искать в классе всюду ограниченных функций (напряжений). Следовательно, к полученным системам необходимо добавить условия ограниченности напряжений на концах зон предразрушения. Записывая эти условия, получим:

$$\sum_{k=1}^M (-1)^k p_k^0 \operatorname{ctg} \frac{\theta_k}{2} = 0; \quad \sum_{k=1}^M (-1)^{k+M} p_k^0 \operatorname{tg} \frac{\theta_k}{2} = 0;$$

$$\sum_{v=1}^M (-1)^{v+M} R_v^0 \operatorname{tg} \frac{\theta_v}{2} = 0; \quad \sum_{v=1}^M (-1)^v R_v^0 \operatorname{ctg} \frac{\theta_v}{2} = 0. \quad (20)$$

Так как размеры зон предразрушения неизвестны, объединенная алгебраическая система уравнений оказалась нелинейной даже при линейно-уп-

ругих связях. Для ее решения использовали метод последовательных приближений. В случае нелинейного закона деформирования связей при определении усилий в связях, использовался также итерационный алгоритм, подобный методу упругих решений [21]. Считается, что закон деформирования межчастичных связей в зоне предразрушения линейный при  $(w^+ - w^-) \leq \delta^*$ . Нелинейная часть кривой деформирования связей аппроксимировалась билинейной зависимостью [13], восходящий участок которой соответствовал деформированию с максимальным усилием связей. При  $(w^+ - w^-) > \delta^*$  закон деформирования описывался нелинейной зависимостью, определяемой точками  $(\delta^*, \tau^*)$  и  $(\delta_c, \tau_c)$ , причем при  $\tau_c \geq \tau^*$  имела место возрастающая линейная зависимость (линейное упрочнение, соответствующее упругопластической деформации связей).

Для определения предельного состояния, при котором происходит рост трещин, использовали деформационный критерий разрушения [22].

Используя полученное решение, условиями, определяющими предельную внешнюю нагрузку, при которой в точке  $x = x_0$  или  $y = y_0$  образуется трещина, найдены следующие:

$$\begin{aligned} C(x_0, q_y(x_0))q_y(x_0) &= \delta_c; \\ C(y_0, q_x(y_0))q_x(y_0) &= \delta_c, \end{aligned} \quad (21)$$

где  $\delta_c$  — характеристика сопротивления материала связующего трещинообразованию.

На рисунке 2 представлены зависимости касательных напряжений  $q_y/\tau_y^\infty$  в связях вдоль зоны предразрушения от безразмерной координаты  $x = (\ell + a)/2 + x'(\ell - a)/2$  для различных радиусов отверстий:  $\lambda = 0,2 \div 0,5$  (кривые 1–4). Зоны предразрушения находятся в связующем, поэтому взяты размеры отверстий. Величина  $\lambda$  связана с радиусом  $\lambda_1$  ортотропного включения  $\lambda = \lambda_1 + h$ . Расчеты были проведены для стеклопластика ЭДЦ-В с параметрами  $\mu_b/\mu_s = 25$ ;  $\mu_b/\mu_t = 50$ .

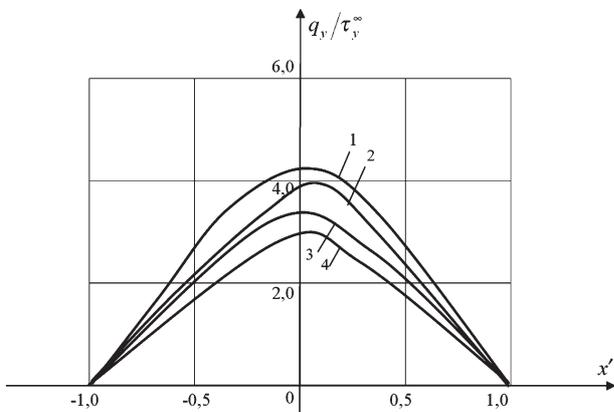


Рисунок 2 — Зависимости касательных напряжений  $q_y/\tau_y^\infty$  в связях вдоль зоны предразрушения  $(\ell - a)/\lambda$  от безразмерной координаты  $x'$  для различных радиусов отверстий:  $\lambda = 0,2 \div 0,5$  (кривые 1–4)

На рисунке 3 приведены зависимость критической нагрузки  $\tau^* = \tau_y^\infty/\tau_*$  от расстояния  $a_* = a - \lambda$  при  $\lambda = 0,3$ .

Решение объединенной алгебраической системы позволяет определить критическое значение внешней нагрузки, размеры зон предразрушения и касательные напряжения в связях в состоянии предельного равновесия, при которых в связующем композита образуются трещины.

**Заключение.** Задача о зарождении трещины продольного сдвига в композитах с периодической структурой решена впервые.

Анализ критического равновесного состояния в композите с периодической структурой, при котором появляются трещины, сводится к параметрическому исследованию объединенной алгебраической системы (12), (15)–(20) и критерия появления трещины (21) при различных законах деформирования связей, упругих постоянных материалов и геометрических характеристиках композита. Непосредственно из решения полученных алгебраических систем определяются касательные напряжения в связях и сдвиг берегов зон предразрушения. Полученные соотношения позволяют исследовать трещинообразование в составном теле при продольном сдвиге.

**Список обозначений**

- $P_m$  — центры круговых отверстий;
- $\omega$  — период периодической системы круговых отверстий;
- $\lambda$  — радиус отверстий;
- $\lambda_1$  — радиус сечения ортотропного включения;
- $h$  — толщина покрытия;
- $\tau_x, \tau_y$  — компоненты тензора напряжений в декартовой системе координат;
- $q_y(x), q_x(y)$  — усилия в связях между берегами зон предразрушения;
- $w$  — компонента вектора смещений;

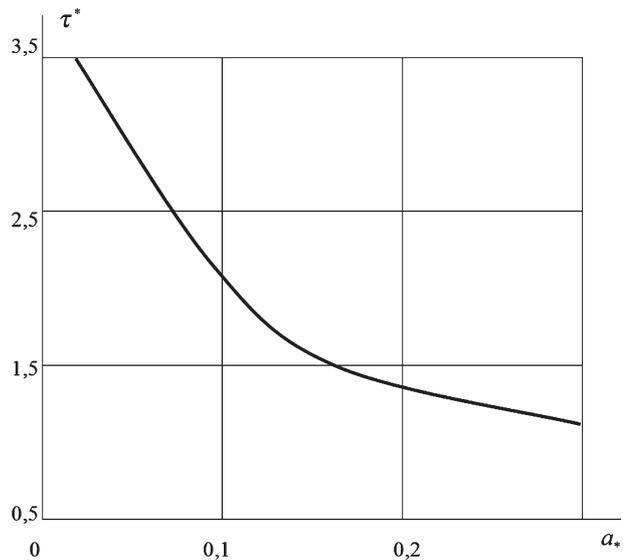


Рисунок 3 — Зависимость критической нагрузки  $\tau^* = \tau_y^\infty/\tau_*$  от расстояния  $a_* = a - \lambda$  при  $\lambda = 0,3$

$C(x, q_y(x)), C(y, q_x(y))$  — эффективная податливость связей;  
 $\delta_c$  — характеристика сопротивления материала связующего трещинообразования;  
 $F(z)$  — аналитическая функция, описывающая напряженное состояние тела;  
 $\mu$  — модуль сдвига материала;  
 $\alpha_{2k}$  — коэффициенты разложений комплексного потенциала;  
 $g(x)$  и  $g_1(y)$  — искомые функции;  
 $\tau_y^\infty$  — параметр нагружения;  
 $a, \ell, b, r$  — параметры, характеризующие длины зон предразрушения.

### Список литературы

- Болотин, В.В. Механика зарождения и начального развития усталостных трещин / В.В. Болотин // ФХММ. — 1986. — Т. 22, № 1. — С. 18–23.
- Мирсалимов, В.М. К решению задачи механики контактного разрушения о зарождении и развитии трещины со связями между берегами во втулке фрикционной пары / В.М. Мирсалимов // ПММ. — 2007. — Т. 71, вып. 1. — С. 132–151.
- Zolgharnein, E. Nucleation of a crack under inner compression of cylindrical bodies / E. Zolgharnein, V.M. Mirsalimov // Acta Polytechnica Hungarica. — 2012. — Vol. 9, No. 2. — Pp. 169–183.
- Vaghari, A.R. Nucleation of a crack in a perforated heat-releasing material with temperature dependent elastic properties / A.R. Vaghari, V.M. Mirsalimov // J. of Applied Mechanics and Technical Physics. — 2012. — Vol. 53, No. 4. — Pp. 589–598.
- Гасанов, Ф.Ф. Трещинообразование в перфорированном теле при продольном сдвиге / Ф.Ф. Гасанов // Механика машин, механизмов и материалов. — 2013. — № 2. — С. 46–51.
- Искендеров, Р.А. Зарождение трещины при поперечном изгибе изотропной пластины, ослабленной периодической системой круговых отверстий / Р.А. Искендеров // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. — 2013. — № 3 — С. 18–28.
- Cherepanov, G.P. Methods of Fracture Mechanics / G.P. Cherepanov. Solid Matter Physics Series: Solid Mechanics and Its Applications. — 1997. — Vol. 51, XIII. — 322 p.
- Mohammed, I. Cohesive zone modeling of crack nucleation at bimaterial corners / I. Mohammed, K.M. Liechti // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 2000. — Vol. 48, Issue 4. — Pp. 735–764.
- Yang, B. Examination of free-edge crack nucleation around an open hole in composite laminates / B. Yang // International Journal of Fracture. — 2002. — Vol. 115, Issue 2. — Pp. 173–191.
- Yang, Q. Cohesive models for damage evolution in laminated composites / Q. Yang, B. Cox // International Journal of Fracture. — 2005. — Vol. 133, Issue 2. — Pp. 107–137.
- Lipperman, F. Nucleation of cracks in two-dimensional periodic cellular materials / F. Lipperman, M. Ryvkin, M.B. Fuchs // Computational Mechanics. — 2007. — Vol. 39, Issue 2. — Pp. 127–139.
- Gutkin, M.Yu. Effect of inclusions on heterogeneous crack nucleation in nanocomposites / M.Yu. Gutkin, I.A. Ovid'ko, N.V. Skiba // Physics of the Solid State. — 2007. — Vol. 49, Issue 2. — Pp. 261–266.
- Гольдштейн, Р.В. Моделирование трещиностойкости композиционных материалов / Р.В. Гольдштейн, М.Н. Перельмутер // Вычисл. мех. сплош. сред. — 2009. — Т. 2, № 2. — С. 22–39.
- Кластеро- и трещинообразование в композитах / Е.В. Новиков [и др.] // Международный технико-экономический журнал. — 2012. — № 5. — С. 96–99.
- Chen, Z. Estimation of the Stress State Within Particles and Inclusions and a Nucleation Model for Particle Cracking / Z. Chen, C. Butcher // Micromechanics Modelling of Ductile Fracture: Solid Mechanics and Its Applications. — 2013. — Vol. 195. — Pp. 223–243.
- Мирсалимов, В.М. Разрушение упругих и упругопластических тел с трещинами / В.М. Мирсалимов. — Баку: Элм, 1984. — 124 с.
- Ван Фо Фы, Г.А. Теория армированных материалов с покрытиями / Г.А. Ван Фо Фы. — Киев: Наук. думка, 1971. — 236 с.
- Лехницкий, С.Г. Кручение анизотропных стержней / С.Г. Лехницкий. — М.: Наука, 1971. — 240 с.
- Каландия, А.И. Математические методы двумерной упругости / А.И. Каландия. — М.: Наука, 1973. — 304 с.
- Мирсалимов, В.М. Неоднородные упругопластические задачи / В.М. Мирсалимов. — М.: Наука, 1987. — 256 с.
- Ильюшин, А.А. Пластичность / А.А. Ильюшин. — М. Логос. 2004. — 376 с.
- Панасюк, В.В. Механика квазихрупкого разрушения материалов / В.В. Панасюк. — Киев: Наук. думка, 1991. — 416 с.

Hasanov F.F.

### Nucleation of the crack in a composite, reinforced unidirectional orthotropic fibres at longitudinal shear

The problem of mechanics of fracture about interaction orthotropic elastic inclusions which surface is uniform is considered in covered by a homogeneous cylindrical film, and rectilinear of a bridged prefracture zones collinear to axes abscissa and ordinates in isotropic planes. The model of nucleation of cracks in composites with the periodic structure, based on consideration of a zone of process fracturing is offered. It is accepted, that the zone of process fracturing represents a layer of the finite length containing a material with in part broken bonds between separate structural elements. Presence of bonds between faces of a zone of prefracture (a zone of the weakened interpartial bonds of a material) is modelled by applying cohesive forces caused by bonds to a surface of prefracture zones. The analysis of the limit equilibrium in a composite, at which there is an occurrence of a crack, is carried out on the basis of criterion of critical shear of bonds of a material.

**Keywords:** *orthotropic elastic inclusions, prefracture zone, longitudinal shear, perforated plane, force of cohesion, nucleation of cracks*

Поступила в редакцию 06.11.2013.