

УДК 519.63

Г.А. ГЕВОРКЯН, канд. техн. наук

научный сотрудник

E-mail: hrgevorkian@mail.ru

Институт механики НАН Республики Армения, г. Ереван, Республика Армения

Поступила в редакцию 16.09.2015.

ТРАКТОВКА ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО СМЫСЛА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ И ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ АППАРАТА МКЭ

В настоящей статье на основе ранее сформулированной плоско-пространственной задачи метода конечных элементов развивается понятие конечных разностей для двумерной сплошной среды. В соответствии с указанным развитием формулируются операторы градиента и лапласиана скалярного поля, для которых вырождением в случае одномерной среды выступает фундаментальная категория математического анализа — понятие производной функции скалярного аргумента.

Ключевые слова: конечные и центральные разности, скалярный потенциал перемещений, скалярное поле, дифференциальные операторы, градиент, дивергенция, лапласиан, производная функции

Введение. Конечные разности [1] давно вошли в математический арсенал и надежно зарекомендовали себя в качестве универсальных преобразований дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений к виду алгебраических уравнений, нахождение приближенного, или численного, решения которых достигается значительно проще, чем отыскание аналитического решения оригинальных уравнений.

Классические схемы конечных разностей вскоре нашли развитие в форме их естественного обобщения на случай неравноотстоящих абсцисс, названных *разделенными разностями* [1]. Помимо этого, в зависимости от направления интерполяции конечные разности принято подразделять на *разности «вперед»*, *разности «назад»* и *центральные разности* [1]. Таким образом, вышеперечисленные разновидности и обобщения конечных разностей сформировали общеизвестный *метод конечных разностей*, которому в современной вычислительной математике отводится значительная роль.

Между тем, как показывает современное развитие *метода конечных элементов* [6], конечные разности предполагают некое весьма важное для науки геометрическое обобщение на двумерное пространство, с которым предлагается ознакомиться ниже.

Антиплоская деформация как аналогия уравнения прогибов мембраны. Подробный анализ сформулированной в работе [6] плоско-пространственной задачи МКЭ квалифицирует ее как особую модификацию *антиплоского сдвига* или *антиплоской деформации* [4] применительно к определению прогибов плоской сплошной среды:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{f}{G}, \quad (1)$$

где w — функция прогибов; f — объемная сила; G — модуль сдвига.

С другой стороны, дифференциальное уравнение прогибов мембраны записывается в виде [3]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{p}{q}, \quad (2)$$

где p — давление на единицу площади мембраны, а q — растягивающее усилие, приходящееся в каждом сечении мембраны на единицу его длины.

Нетрудно заметить, что между дифференциальными уравнениями (1) и (2) устанавливается аналогия на основе следующих тождеств:

$$\begin{cases} p \equiv fh; \\ q \equiv Gh, \end{cases} \quad (3)$$

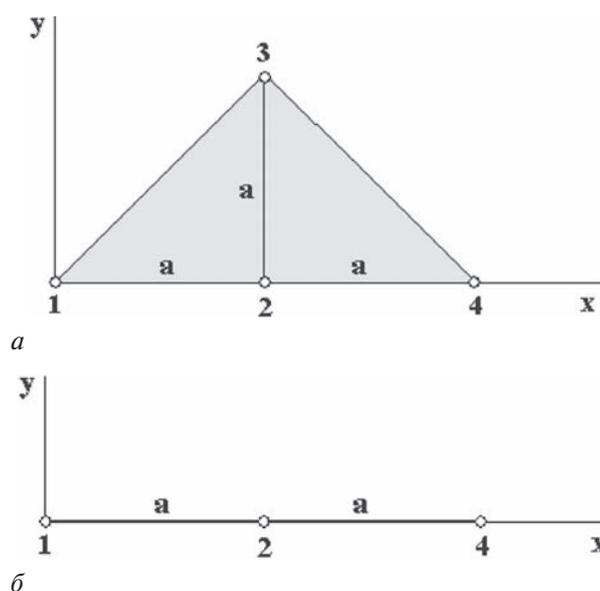


Рисунок 1 — Развернутая двумерная (а) и свернутая одномерная (б) системы

причем h — коэффициент подобия, в частности, бесконечно малая величина толщины мембраны (технической мембраны), удовлетворяющая неравенству $h/a < 40$ [3], где a — наибольший характерный ее размер.

Переход от антиплоского сдвига к центральным разностям. Воспользовавшись формализмом плоско-пространственной задачи МКЭ [6], приступаем к формированию матрицы жесткости тонкой пластинки толщиной h , подлежащей математическому описанию на основе плоской механической системы, изображенной на рисунке 1 а.

Матрица жесткости на сдвиг [K] однородного и изотропного конечного элемента 123 (см. рисунок 1 а) на основании формализма [6] формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} [K_{123}] &= \iiint_{V_1} [C_{123}]^T [G] [C_{123}] dV = \\ &= V \begin{bmatrix} c_l & b_l \\ c_m & b_m \\ c_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_l & c_m & c_n \\ b_l & b_m & b_n \end{bmatrix} = \\ &= V \begin{bmatrix} G(c_l^2 + b_l^2) & G(c_l c_m + b_l b_m) & G(c_l c_n + b_l b_n) \\ G(c_l c_m + b_l b_m) & G(c_m^2 + b_m^2) & G(c_m c_n + b_m b_n) \\ G(c_l c_n + b_l b_n) & G(c_m c_n + b_m b_n) & G(c_n^2 + b_n^2) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где V — объем призматического тела 123.

Далее, в результате нахождения коэффициентов b_l, b_m, b_n и c_l, c_m, c_n по известным формулам [6], в зависимости от координат узлов, получаем матрицы жесткости составных элементов 123 и 234 (см. рисунок 1 а), которые с учетом обозначения $c = G$ записываются:

$$\begin{aligned} [K_{123}] &= -\frac{V}{a^2} \begin{bmatrix} -c & c & 0 \\ c & -2c & c \\ 0 & c & -c \end{bmatrix}; \\ [K_{234}] &= -\frac{V}{a^2} \begin{bmatrix} -2c & c & c \\ c & -c & 0 \\ c & 0 & -c \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

В итоге на основании рассчитанных выше парциальных матриц жесткости образуется матрица жесткости для ансамбля элементов [6]:

$$[K_{1234}] = -\frac{h}{2} \begin{bmatrix} -c & c & 0 & 0 \\ c & -4c & 2c & c \\ 0 & 2c & -2c & 0 \\ 0 & c & 0 & -c \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Теперь будем неограниченно приближать узел 3 исходной, или *развернутой*, системы на рисунке 1 а к узлу 2. Образуется таким образом вырожденная, или *свернутая*, система (см. рисунок 1 б), состоящая из трех узловых точек — 1, 2 и 4, жесткость которой будет характеризоваться матрицей:

$$[K_{124}] = -\frac{h}{2} \begin{bmatrix} -c & c & 0 \\ c & -2c & c \\ 0 & c & -c \end{bmatrix}. \quad (5)$$

В силу вышеуказанного нетрудно заметить, что структура матрицы жесткости (5) соответствует способу дискретизации согласно схеме центральных разностей [1]. В самом деле, формула для центральных разностей второго порядка генерируется на основе *инкрементально-декрементально* (increment — приращение, decrement — убавление) подхода [1]:

$$\begin{aligned} y'_1 &= \frac{y_2 - y_1}{a}, \quad y'_2 = \frac{y_4 - y_2}{a} \Rightarrow \\ y''_2 &= \frac{y'_1 - y'_2}{-a} = \frac{y'_2 - y'_1}{a} = \frac{\frac{y_4 - y_2}{a} - \frac{y_2 - y_1}{a}}{a} = \\ &= \frac{y_1 - 2y_2 + y_4}{a^2}, \end{aligned}$$

тогда как, например, формула для правых разностей второго порядка образуется в силу *двойкоинкрементальной выкладки* [1]:

$$\begin{aligned} y'_1 &= \frac{y_2 - y_1}{a}, \quad y'_2 = \frac{y_4 - y_2}{a} \Rightarrow \\ y''_1 &= \frac{y'_2 - y'_1}{a} = \frac{\frac{y_4 - y_2}{a} - \frac{y_2 - y_1}{a}}{a} = \frac{y_1 - 2y_2 + y_4}{a^2}. \end{aligned}$$

Для сравнения приводятся ниже матрицы жесткости для той же свернутой системы (см. рисунок 1 б), только составленные на основе *двойкоинкрементальных правых* (разности «вперед») и *двойкодекрементальных левых* (разности «назад») разностей второго порядка:

$$\begin{aligned} [K_{124}^+] &= -\frac{h}{2} \begin{bmatrix} -c & 2c & -c \\ 0 & -c & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ [K_{124}^-] &= -\frac{h}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -c & c & 0 \\ -c & 2c & -c \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Это обстоятельство служит наглядной геометрической иллюстрацией единства и общности численных методов математики, а также достаточным свидетельством неодинаковой точности моделирования центральными, правыми и левыми разностями по сравнению с МКЭ.

Градиент и лапласиан скалярного поля. Пусть имеем некоторую двумерную область Ω^2 , предполагаемую вначале также и плоской, разбитую на треугольные конечные элементы lmn с площадями Δ_{lmn} (рисунок 2).

Далее подразумевается, что рассматриваемое поле перемещений антиплоской деформации [4, 6]

при равенстве нулю тензора малого жесткого поворота $\tilde{\omega} = 0$ удовлетворяет условию чистой деформации [3], т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y}; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z},$$

при котором выражение $udx + vdy + wdz$ является полным дифференциалом некоторой скалярной функции $\Psi = \Psi(x, y, z)$, именуемой скалярным потенциалом перемещения [3].

Тогда градиентом скалярного поля перемещений $w(x, y)$, или, вообще говоря, градиентом скалярного поля $\Lambda = \Lambda(x, y)$ будет являться следующий предел:

$$\begin{aligned} \text{grad} \vec{w} &= \text{grad} \Lambda(x, y) = \text{grad} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) = \\ &= \lim_{\Delta_{lmn} \rightarrow 0} (c_l \hat{i} + b_l \hat{j}) = \lim_{\Delta_{lmn} \rightarrow 0} (c_m \hat{i} + b_m \hat{j}) = \\ &= \lim_{\Delta_{lmn} \rightarrow 0} (c_n \hat{i} + b_n \hat{j}), \quad \Delta_{lmn} \in \Omega^2, \end{aligned} \quad (6)$$

где \hat{i} и \hat{j} — орты координатных осей x и y ; Δ_{lmn} — площадь конечного элемента lmn , а также с учетом принятых в формализме [6] обозначений

$$b_l = \frac{1}{2\Delta_{lmn}}(y_m - y_n); \quad c_l = \frac{1}{2\Delta_{lmn}}(x_n - x_m), \quad (7)$$

причем коэффициенты b_m, c_m и b_n, c_n определяются из выражений (7) на основании координат узлов x_p, x_m, x_n и y_p, y_m, y_n путем круговой перестановки индексов l, m и n .

Аналогично формулируется лапласиан скалярного поля перемещений $w(x, y)$, или, вообще говоря, лапласиан скалярного поля $\Lambda = \Lambda(x, y)$:

$$\begin{aligned} \Delta w &= \Delta \Lambda(x, y) = \text{grad} \vec{\Lambda} \cdot \text{grad} \vec{\Lambda} = \\ &= \text{div}(\text{grad} \vec{\Lambda}) = \lim_{\Delta_{lmn} \rightarrow 0} (c_l^2 + b_l^2) = \\ &= \lim_{\Delta_{lmn} \rightarrow 0} (c_m^2 + b_m^2) = \lim_{\Delta_{lmn} \rightarrow 0} (c_n^2 + b_n^2), \quad \Delta_{lmn} \in \Omega^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Градиент и лапласиан для двумерного поверхностного скалярного поля $\tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}(\xi, \eta)$ формулируются в криволинейных координатах ξ и η следующим образом (рисунок 3):

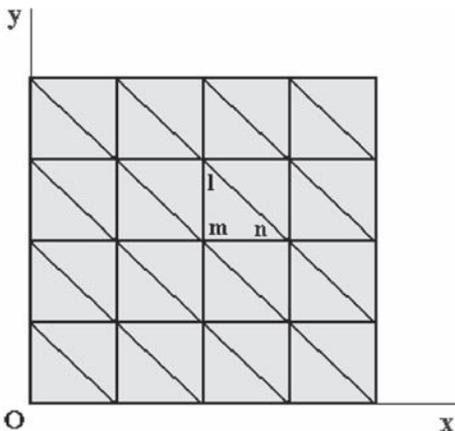


Рисунок 2 — Схема области плоского скалярного поля

$$\begin{aligned} \text{grad} \vec{w} &= \text{grad} \tilde{\Lambda}(\xi, \eta) = \text{grad} \left(\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial z} \right) = \\ &= \lim_{\Delta_{lmn} \rightarrow 0} (c_l \hat{\tau}_l + b_l \hat{b}_l) = \lim_{\Delta_{lmn} \rightarrow 0} (c_m \hat{\tau}_m + b_m \hat{b}_m) = \\ &= \lim_{\Delta_{lmn} \rightarrow 0} (c_n \hat{\tau}_n + b_n \hat{b}_n), \quad \Delta_{lmn} \in \tilde{\Omega}^2, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\hat{\tau}$ и \hat{b} — тангенциаль и бинормаль (орты) в точке $\Delta_{lmn} \rightarrow 0$ поверхности $\tilde{\Omega}^2$;

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{w} &= \Delta \tilde{\Lambda}(\xi, \eta) = \text{grad} \vec{\tilde{\Lambda}} \cdot \text{grad} \vec{\tilde{\Lambda}} = \text{div}(\text{grad} \vec{\tilde{\Lambda}}) = \\ &= \lim_{\Delta_{lmn} \rightarrow 0} (c_l^2 + b_l^2) = \lim_{\Delta_{lmn} \rightarrow 0} (c_m^2 + b_m^2) = \lim_{\Delta_{lmn} \rightarrow 0} (c_n^2 + b_n^2), \quad \Delta_{lmn} \in \tilde{\Omega}^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Градиент и лапласиан для двумерного поверхностного скалярного поля $\tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}(\xi, \eta)$ могут, как известно [5], быть переформулированы в виде одноименных дифференциальных операторов применительно к трехмерному скалярному полю $\Lambda = \Lambda(x, y, z)$ для области Ω^3 (см. рисунок 3):

$$\text{grad} \vec{w} = \text{grad} \vec{\Lambda}(x, y, z) = \frac{\partial \Lambda}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \Lambda}{\partial z} \hat{k}; \quad (11)$$

$$\Delta w = \Delta \Lambda(x, y, z) = \text{div}[\text{grad} \vec{\Lambda}] = \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial z^2}. \quad (12)$$

Выясняется, что, с одной стороны, понятия градиента и лапласиана для двумерных скалярных полей (6)–(12) выступают естественным обобщением понятия производной функции скалярного аргумента $\Lambda = \Lambda(x)$ [5]:

$$\Lambda'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Lambda(x + \Delta x) - \Lambda(x)}{\Delta x}. \quad (13)$$

С другой стороны, новая формулировка вектора градиента, выражающаяся равенствами (6) и (11), полностью опредмечивает классическое определение градиента как вектора, обладающего наибольшим по модулю значением производной функции по направлению [5] (см. рисунок 3):

$$\begin{aligned} \frac{d\Lambda}{d\lambda} &= |\text{grad} \vec{\Lambda}| \cos(\hat{g}, \hat{\lambda}); \\ |\text{grad} \vec{\Lambda}| &= \sqrt{\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial z} \right)^2}, \end{aligned} \quad (14)$$

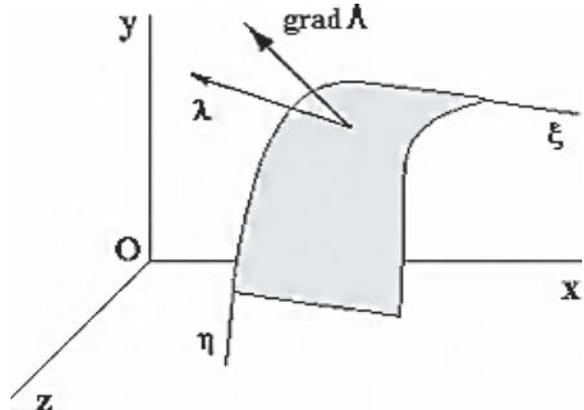


Рисунок 3 — Схема области поверхностного скалярного поля

причем \hat{g} и $\hat{\lambda}$ — орты, направленные вдоль векторов $\text{grad}\bar{\Omega}$ и $\bar{\lambda}$.

Заключение. В изложенном материале предлагается новое развитие понятия конечных разностей и новое обобщение понятия производной функции скалярного аргумента как предельной формы центральных разностей в виде традиционных дифференциальных операторов, а именно в терминах градиента и лапласиана. Рассмотрены случаи *плоского и поверхностного скалярных полей*, подлежащих формальному описанию в прямоугольной декартовой и в криволинейной декартовых системах координат.

Автор выражает глубокую признательность рецензенту статьи доктору технических наук Шимановскому А.О. за помощь в подготовке статьи к публикации.

GEVORGYAN Hrant A., Cand. Techn. Sc.

Researcher

E-mail: hrgevorkian@mail.ru

Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of the Republic of Armenia, Yerevan, Republic of Armenia

Received 16 September 2015.

AN INTERPRETATION OF THE GEOMETRIC MEANING OF THE FINITE DIFFERENCE AND THE FUNCTION DERIVATIVE THROUGH THE USE OF THE FINITE ELEMENT METHOD TOOLS

In the present article on the basis of earlier formulated plan-spatial problem of the finite elements method the concept of finite differences for the two-dimensional continuous environment is developed. According to the indicated development, are formulated the operators of the gradient and Laplacian of the scalar field for whom in the case of the one-dimensional environment is as degeneration the fundamental concept of mathematical analysis — the derivative of function of scalar argument.

Keywords: *finite and central differences, displacements scalar potential, scalar field, differential operators, gradient, divergence, Laplacian, function derivative*

References

1. Demidovich B.P., Maron I.A. *Osnovy vychislitel'noj matematiki* [Computational Mathematics]. Moscow, 1970. 664 p.
2. Zienkiewicz O. *Metod konechnyh jelementov v tehnikе* [The Finite Element Method in Engineering Science]. Moscow, 1977. 543 p.
3. Demidov S. *Teorija uprugosti* [Theory of Elasticity]. Moscow, 1979. 432 p.
4. Novatsky B. *Teorija uprugosti* [Theory of Elasticity]. Moscow, 1975. 375 p.

Список литературы

1. Демидович, Б.П. Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович, И.А. Марон. — М.: Наука, 1970. — 664 с.
2. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. — М., 1975. — 543 с.
3. Демидов, С.П. Теория упругости / С.П. Демидов. — М., 1979. — 432 с.
4. Новацкий, В. Теория упругости / В. Новацкий. — М.: Мир, 1975. — 375 с.
5. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. Т. 1 / Г.М. Фихтенгольц. — М.: Наука, 1970. — 607 с.
6. Геворкян, Г.А. Плоско-пространственная задача метода конечных элементов / Г.А. Геворкян // Механика машин, механизмов и материалов. — 2014. — № 1(26). — С. 49–52.

5. Fikhtengolts G. *Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischislenija* [Differential and Integral Calculus]. Moscow, 1970, vol. 3. 607 p.
6. Gevorgyan H. *Plosko-prostranstvennaja zadacha metoda konechnyh jelementov* [A Plane-Spatial Problem in the Finite Element Method]. *Mehanika mashin, mehanizmov i materialov* [Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials], 2014, no. 1(26), pp. 49–52.