



МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.3

М.А. ЖУРАВКОВ, д-р физ.-мат. наук, проф.

Министр образования Республики Беларусь

E-mail: zhuravkov@bsu.by

Министерство образования Республики Беларусь, г. Минск, Республика Беларусь

Э.И. СТАРОВОЙТОВ, д-р физ.-мат. наук, проф.

заведующий кафедрой «Строительная механика»¹

E-mail: edstar0@yandex.by

Д.В. ЛЕОНЕНКО, д-р физ.-мат. наук, доц.

профессор кафедры «Строительная механика»¹

E-mail: leoden@tut.by

¹Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Республика Беларусь

Поступила в редакцию 23.03.2016.

ПОВТОРНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ ЛОКАЛЬНОЙ НАГРУЗКОЙ

В рамках теории малых упругопластических деформаций рассмотрен один класс простых переменных локальных нагружений трехслойных стержней прямоугольного поперечного сечения с упругопластически несущими слоями и физически нелинейно-упругим заполнителем, для которого указана возможность построения решения краевой задачи при повторном нагружении, если известно решение при нагружении из естественного состояния (гипотеза Москвитина). Приведена постановка и методика решения краевой задачи о деформировании трехслойного несимметричного по толщине стержня при повторном воздействии локальной прямоугольной нагрузкой. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета стержня приняты гипотезы ломаной нормали: в тонких несущих слоях справедливы гипотезы Бернулли, в жестком несжимаемом по толщине сравнительно толстом заполнителе нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол. Уравнения равновесия выведены с помощью вариационного метода Лагранжа, учтена работа заполнителя в тангенциальном направлении. Аналитические решения задач теории малых упругопластических деформаций при прямом и обратном нагружениях получены методом упругих решений Ильюшина. Проведен численный анализ решений.

Ключевые слова: циклическое локальное нагружение, пластичность, трехслойный стержень

Введение. В авиастроении, ракетостроении, транспортном и атомном машиностроении, в добыче и транспортировке энергоносителей, а также в других областях техники широкое применение находят трехслойные элементы конструкций. Они состоят из двух несущих слоев и заполнителя, обеспечивающего их совместную работу. Несущие слои из материалов высокой прочности и жесткости предназначены для восприятия основной части механической нагрузки. Связующие слои, служа-

щие для образования монолитной конструкции, обеспечивают перераспределение усилий между несущими слоями, а также предназначены для защиты от тепловых химических, радиационных и других нежелательных воздействий. Такое сочетание слоев позволяет обеспечивать надежную работу конструкции в неблагоприятных условиях окружающей среды, создавать конструкции, сочетающие высокую прочность и жесткость с относительно малой массой.

На сегодняшний день создание общей теории квазистатического деформирования трехслойных элементов конструкций еще не завершено и интенсивно продолжается. В первую очередь это связано с необходимостью расчетов при физически нелинейном поведении материалов слоев в сложных условиях эксплуатации, в том числе при переменных нагрузках.

В монографиях [1–3] рассматриваются различные математические модели многослойных, как правило, упругих элементов конструкций, приведены постановки краевых задач, изложены методы их расчета. Работа [4] содержит постановки краевых задач для физически нелинейных, в том числе упруго-пластических, однородных элементов конструкций. Статья [5] посвящена исследованию квазистатического деформирования упругих геометрически нелинейных многослойных стержней. В статьях [6, 7] исследовано деформирование сэндвич-балок и пластин с помощью метода усреднения упругих свойств материалов слоев. Анализ ползучести армированных балок-стенок из нелинейно-наследственных материалов и слоистых вязкоупруго-пластических систем рассмотрен в работе [8, 9]. Решение краевых задач о деформировании трехслойных упруго-пластических стержней и пластин в температурном поле при однократных непрерывных нагрузках проведено в [10–12]. Динамическое поведение слоистых элементов конструкций при непрерывных и локальных нагрузках рассмотрено в работах [13–17]. Исследованию напряженно-деформированного состояния двухслойных металлополимерных пластин при циклических нагрузениях посвящена работа [18]. Следует отметить, что деформирование упруго-пластических трехслойных элементов конструкций при локальных переменных нагрузках ранее не проводилось.

Здесь, в рамках теории малых упруго-пластических деформаций [19, 20], построено решение краевой задачи о повторном знакопеременном локальном нагружении трехслойного стержня прямоугольного поперечного сечения с упруго-пластическими несущими слоями и физически нелинейно-упругим заполнителем. Численные результаты получены для металлополимерного стержня, находящегося под действием локальной прямоугольной (равномерно распределенной внутри интервала) нагрузки.

Нагружение из естественного состояния. Под циклическим (или переменным) деформированием упруго-пластических тел будем понимать такие изменения во времени внешних нагрузок, при которых во всем теле происходит чередование нагружения и разгрузки. Термин «нагружение тела из естественного состояния», подразумевает, что в теле до приложения нагрузки отсутствуют предварительные напряжения и деформации. При циклическом деформировании упруго-пластических тел характерной особенностью является влияние предыстории на состояние в данный момент

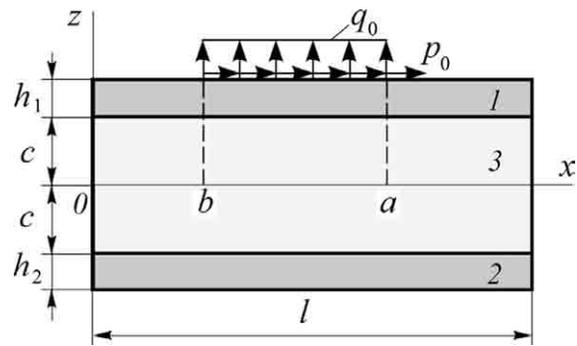


Рисунок 1 — Схема нагружения трехслойного стержня

времени. В связи с этим возникают проблемы при исследовании многообразия проявления их деформационных свойств и создания методов расчета напряженно-деформированного состояния.

Рассматривается деформирование несимметричного по толщине трехслойного стержня, несущие слои которого выполнены из упруго-пластического материала, а несжимаемый по толщине заполнитель — нелинейно-упругий. Система координат x, y, z связывается со срединной плоскостью заполнителя (рисунок 1). Принимается, что для тонких несущих слоев 1, 2 справедливы гипотезы Бернулли, в жестком несжимаемом по толщине сравнительно толстом заполнителе 3 нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi'(x)$.

На внешний слой стержня действуют поверхностные силовые нагрузки $q'(x)$ и $p'(x)$, при этом соответствующие траектории нагружения относятся к классу простых [19], через $w'(x)$ и $u'(x)$ обозначены прогиб и продольное перемещение срединной плоскости заполнителя (штрих сверху здесь и в дальнейшем соответствует нагружению из естественного состояния). На торцах предполагается наличие жестких диафрагм, препятствующих относительно сдвигу слоев, на границах слоев — склейки. С помощью введенных гипотез, продольные перемещения в слоях $u^{(k)}$ выражаются через три искомые функции $u'(x)$, $\psi'(x)$ и $w'(x)$:

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u' + c\psi' - zw'_{,x} \quad (c \leq z \leq c + h_1); \\ u^{(3)} &= u' + z\psi' - zw'_{,x} \quad (-c \leq z \leq c); \\ u^{(2)} &= u' - c\psi' - zw'_{,x} \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c), \end{aligned} \quad (1)$$

где z — координата рассматриваемого волокна; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате; $h_1, h_2, h_3 = 2c$ — толщины слоев; верхний индекс k — номер слоя.

Деформации в стержне следуют из перемещений (1) и соотношений Коши [4]. Введем обобщенные внутренние усилия в стержне:

$$\begin{aligned} N' &= \sum_{k=1}^3 N'^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_h \sigma'_{xx}{}^{(k)} dz; \\ M' &= \sum_{k=1}^3 M'^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_h \sigma'_{xx}{}^{(k)} z dz; \quad Q' = \int_h \sigma'_{xz}{}^{(3)} dz, \end{aligned}$$

где $\sigma_{ij}^{(k)}$ — компоненты тензора напряжений в k -м слое на первом полуцикле нагружения.

В несущих слоях используются физические соотношения теории малых упругопластических деформаций Ильюшина [19]:

$$\begin{aligned} s_{ij}^{(k)} &= 2G_k f^{(k)}(\epsilon_u^{(k)}) \vartheta_{ij}^{(k)}; \\ \sigma^{(k)} &= 3K_k \epsilon^{(k)}, (k=1, 2; i, j=x, y, z). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $s_{ij}^{(k)}, \vartheta_{ij}^{(k)}$ — девиаторы напряжений и деформаций; $\sigma^{(k)}, \epsilon^{(k)}$ — шаровые части тензоров напряжений и деформаций; G_k, K_k — модули сдвига и объемного деформирования материалов слоев;

$$f^{(k)}(\epsilon_u^{(k)}) = \begin{cases} 1, & \epsilon_u^{(k)} \leq \epsilon_y^{(k)}; \\ 1 - \omega^{(k)}(\epsilon_u^{(k)}), & \epsilon_u^{(k)} > \epsilon_y^{(k)}, \end{cases}$$

где $\omega^{(k)}$ — функция пластичности Ильюшина материалов несущих слоев при нагружении из естественного состояния, например, для металлов ее можно принять в виде:

$$\omega^{(k)}(\epsilon_u^{(k)}) = \begin{cases} 0, & \epsilon_u \leq \epsilon_y; \\ A_0 \left(1 - \frac{\epsilon_y'}{\epsilon_u}\right)^{\alpha_0}, & \epsilon_u \geq \epsilon_y, \end{cases} \quad (4)$$

где $\epsilon_u^{(k)}$ — интенсивность деформаций; $\epsilon_y^{(k)}$ — деформационный предел текучести материала; A_0, α_0 — экспериментальные константы материала, значения которых для некоторых материалов приведены в [4, с. 303, с. 306, с. 313].

Для физически нелинейного заполнителя вводятся подобные уравнения состояния:

$$\begin{aligned} s_{ij}^{(3)} &= 2G_k (1 - \omega^{(3)}(\epsilon_u^{(3)})) \vartheta_{ij}^{(3)}; \\ \sigma^{(3)} &= 3K_k \epsilon^{(3)}, (i, j=x, y, z), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\omega^{(3)}(\epsilon_u^{(3)})$ — универсальная функция физической нелинейности заполнителя типа (4).

Компоненты тензора напряжений в слоях, используя (3), (5), представим через девиатор и шаровую часть тензора деформаций:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(k)} &= s_{xx}^{(k)} + \sigma^{(k)} = 2G_k \vartheta_{xx}^{(k)} + 3K_k \epsilon^{(k)} - 2G_k \vartheta_{xx}^{(k)} \omega^{(k)}; \\ \sigma_{xz}^{(3)} &= s_{xz}^{(3)} = 2G_3 \vartheta_{xz}^{(3)} - 2G_3 \vartheta_{xz}^{(3)} \omega^{(3)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Выделим в компонентах тензора напряжений (6) упругие (индекс «e») и неупругие (индекс «ω») слагаемые:

$$\sigma_{xx}^{(k)} = \sigma_{xx}^{(k)e} - \sigma_{xx}^{(k)\omega}; \quad \sigma_{xz}^{(3)} = \sigma_{xz}^{(3)e} - \sigma_{xz}^{(3)\omega}, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(k)e} &= 2G_k \vartheta_{xx}^{(k)} + 3K_k \epsilon^{(k)}; \quad \sigma_{xx}^{(k)\omega} = 2G_k \vartheta_{xx}^{(k)} \omega^{(k)}; \\ \sigma_{xz}^{(3)e} &= 2G_3 \vartheta_{xz}^{(3)}; \quad \sigma_{xz}^{(3)\omega} = 2G_3 \vartheta_{xz}^{(3)} \omega^{(3)}. \end{aligned}$$

Проведя подобную операцию с внутренними усилиями (2), получим:

$$\begin{aligned} N^{(k)} &= N^{(k)e} - N^{(k)\omega}; \quad M^{(k)} = M^{(k)e} - M^{(k)\omega}; \\ Q^{(3)} &= Q^{(3)e} - Q^{(3)\omega}; \quad Q^{(3)} = Q^{(3)e} - Q^{(3)\omega}. \end{aligned} \quad (8)$$

Упругие (индекс «e») и неупругие (индекс «ω») составляющие в (8) вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} N^{(k)e} &= b_0 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)e} dz; \quad N^{(k)\omega} = b_0 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)\omega} dz; \\ M^{(k)e} &= b_0 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)e} z dz; \quad M^{(k)\omega} = b_0 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)\omega} z dz; \\ Q^{(3)e} &= b_0 \int_{-c}^c \sigma_{xz}^{(3)e} dz; \quad Q^{(3)\omega} = b_0 \int_{-c}^c \sigma_{xz}^{(3)\omega} dz. \end{aligned} \quad (9)$$

Система дифференциальных уравнений равновесия стержня для определения искомых перемещений получена в [12] с помощью метода Лагранжа. В нашем случае она будет

$$\begin{aligned} a_1 u'_{,xx} + a_6 \psi'_{,xx} - a_7 w'_{,xxx} &= -p' + p'_\omega; \\ a_6 u'_{,xx} + a_2 \psi'_{,xx} - a_3 w'_{,xxx} - a_5 \psi' &= h'_\omega; \\ a_7 u'_{,xxx} + a_3 \psi'_{,xxx} - a_4 w'_{,xxx} &= -q' + q'_\omega. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь коэффициенты

$$\begin{aligned} a_1 &= K_1^+ h_1 + K_2^+ h_2 + 2K_3^+ c; \quad a_2 = c^2 \left[K_1^+ h_1 + K_2^+ h_2 + \frac{2}{3} K_3^+ c \right]; \\ a_3 &= c \left[K_1^+ h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) + K_2^+ h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right) + \frac{2}{3} K_3^+ c^2 \right]; \\ a_4 &= K_1^+ h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) + K_2^+ h_2 \left(c^2 + c h_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) + \frac{2}{3} K_3^+ c^3; \\ a_5 &= 2G_3 c; \quad a_6 = c \left[K_1^+ h_1 - K_2^+ h_2 \right]; \\ a_7 &= K_1^+ h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) - K_2^+ h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right), \end{aligned}$$

величины $p'_\omega, h'_\omega, q'_\omega$ учитывают физическую нелинейность материалов слоев и вычисляются по формулам, следующим из (7) и (9):

$$\begin{aligned} p'_\omega &= \frac{1}{b_0} N'^{\omega}; \quad h'_\omega = \frac{1}{b_0} (H'^{\omega} - Q'^{\omega}); \quad q'_\omega = \frac{1}{b_0} M'^{\omega}; \\ N'^{\omega} &= \frac{4}{3} b_0 \sum_{k=1}^3 G_k \int_{h_k} \omega'_k \epsilon'_{xx} dz; \end{aligned} \quad (11)$$

$$M'^{\omega} = \frac{4}{3} b_0 \sum_{k=1}^3 G_k \int_{h_k} \omega'_k \epsilon'_{xx} z dz; \quad Q'^{\omega} = 2b_0 G_3 \int_{-c}^c \omega'_3 \psi' dz.$$

Система дифференциальных уравнений (10) существенно нелинейная. Поэтому рассмотрим возможность применения метода «упругих» решений Ильюшина к решению данной задачи. Предположим, что в (10), (11) содержится малый параметр, например, все $\omega_k < 1$. Тогда применим метод итераций, основанный на методе упругих решений, при котором для любого n -го приближения система уравнений (10) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} a_1 u'_{,xx} + a_6 \psi'_{,xx} - a_7 w'_{,xxx} &= -p' + p'^{(n-1)}_\omega; \\ a_6 u'_{,xx} + a_2 \psi'_{,xx} - a_3 w'_{,xxx} - a_5 \psi' &= h'^{(n-1)}_\omega; \\ a_7 u'_{,xxx} + a_3 \psi'_{,xxx} - a_4 w'_{,xxx} &= -q' + q'^{(n-1)}_\omega. \end{aligned} \quad (12)$$

Величины $p'^{(n-1)}_\omega, h'^{(n-1)}_\omega, q'^{(n-1)}_\omega$, соответствующие неупругим составляющим, на первом шаге ($n=1$) принимаются равными нулю, а в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущего приближения и носят название дополнительных «внешних»

нагрузок. Они служат поправками на пластичность и физическую нелинейность материалов слоев:

$$\begin{aligned}
 p_{\omega}^{\prime(n-1)} &= \frac{1}{b_0} N^{\prime, \omega(n-1)}; h_{\omega}^{\prime(n-1)} = \frac{1}{b_0} (H^{\prime, \omega(n-1)} - Q^{\prime \omega(n-1)}); \\
 q_{\omega}^{\prime(n-1)} &= \frac{1}{b_0} M^{\prime, \omega(n-1)}; N^{\prime \omega(n-1)} = \sum_{k=1}^3 N^{\prime(k)(n-1)} = \\
 &= \frac{4}{3} b_0 \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} G_k \omega^{\prime(k)} (\epsilon_u^{\prime(k)(n-1)}) \epsilon_{xx}^{\prime(k)(n-1)} dz; \\
 M^{\prime \omega(n-1)} &= \sum_{k=1}^3 M^{\prime(k)(n-1)} = \\
 &= \frac{4}{3} b_0 \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} G_k \omega^{\prime(k)} (\epsilon_u^{\prime(k)(n-1)}) \epsilon_{xx}^{\prime(k)(n-1)} z dz; \\
 H^{\prime \omega(n-1)} &= c(N^{\prime(1)\omega(n-1)} - N^{\prime(2)\omega(n-1)}) + M^{\prime(3)\omega(n-1)}; \\
 Q^{\prime \omega(n-1)} &= 2b_0 \int_{-c}^c G_3 \omega^{\prime(3)} (\epsilon_u^{\prime(3)(n-1)}) \psi^{\prime(n-1)} dz. \quad (13)
 \end{aligned}$$

Применение метода упругих решений позволяет на каждом шаге приближения рассматриваемую задачу сводить к линейной задаче теории упругости с дополнительными «внешними» нагрузками.

Рассмотрим изгиб трехслойного упругопластического стержня локальной поперечной прямоугольной поверхностной нагрузкой (см. рисунок 1):

$$\begin{aligned}
 q'(x) &= q_0 (H_0(a-x) - H_0(b-x)); \\
 p'(x) &= p_0 (H_0(a-x) - H_0(b-x)), \quad (14)
 \end{aligned}$$

где $H_0(x)$ — функция Хевисайда.

Решение системы уравнений (12) при нагрузке (14) можно выписать, базируясь на известном решении задачи теории упругости [12]. В нашем случае оно имеет следующий рекуррентный вид:

$$\begin{aligned}
 \psi^{\prime(n)}(x) &= C_2^{\prime(n)} \operatorname{sh}(\beta x) + C_3^{\prime(n)} \operatorname{ch}(\beta x) + \\
 &+ \frac{1}{\beta^2} [\gamma_2 p_0 ((\operatorname{ch}(\beta x - a\beta) - 1)H_0(a-x) - \\
 &- (\operatorname{ch}(\beta x - b\beta) - 1)H_0(b-x)) - \\
 &- \frac{\gamma_1 q_0}{\beta} ((\beta x - \beta a - \operatorname{sh}(\beta x - \beta a))H_0(a-x) - \\
 &- (\beta x - \beta b - \operatorname{sh}(\beta x - \beta b))H_0(b-x)) - \gamma_1 C_1^{\prime(n)}] + \\
 &+ \frac{1}{\beta} [\operatorname{sh}(\beta x) \int_{\omega_1}^{\prime(n)} \operatorname{ch}(\beta x) dx - \operatorname{ch}(\beta x) \int_{\omega_1}^{\prime(n)} \operatorname{sh}(\beta x) dx]; \quad (15) \\
 u^{\prime(n)}(x) &= \gamma_3 \psi^{\prime(n)} + \frac{1}{\alpha_2} [a_4 L_2^{-1}(p_{\omega}^{\prime(n-1)}) - a_4 (p_0 (H_2(a-x) - \\
 &- H_2(b-x)) - a_7 q_0 (H_3(a-x) - H_3(b-x)) - \\
 &- L_3^{-1}(q_{\omega}^{\prime(n-1)}) + \frac{a_7}{2} C_1^{\prime(n)} x^2] + C_7^{\prime(n)} x + C_8^{\prime(n)}; \\
 w^{\prime(n)}(x) &= \frac{1}{\alpha_2} [\alpha_1 \int \psi^{\prime(n)} dx + a_7 (p_0 (H_3(a-x) - H_3(b-x)) + \\
 &+ L_3^{-1}(p_{\omega}^{\prime(n-1)})) + a_4 (q_0 (H_4(a-x) - H_4(b-x)) - L_4^{-1}(q_{\omega}^{\prime(n-1)})) + \\
 &+ \frac{a_1 C_1^{\prime(n)}}{6} x^3] + \frac{C_4^{\prime(n)}}{2} x^2 + C_5^{\prime(n)} x + C_6^{\prime(n)}.
 \end{aligned}$$

Здесь введена функция

$$g_{\omega_1}^{\prime(n)}(x) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \gamma_1 h_{\omega}^{\prime(n-1)} - \gamma_2 p_{\omega}^{\prime(n-1)} - \gamma_1 \left(\int q_{\omega}^{\prime(n-1)} dx + C_1^{\prime(n)} \right),$$

коэффициенты и линейные операторы

$$\begin{aligned}
 \beta^2 &= \frac{a_1 a_5 \alpha_2}{\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1^2}; \quad \gamma_1 = \frac{a_1 \alpha_1}{\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1^2}; \quad \gamma_2 = \frac{a_6 \alpha_2 - a_7 \alpha_1}{\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1^2}; \\
 \gamma_3 &= \frac{a_3 a_7 - a_4 a_6}{\alpha_2};
 \end{aligned}$$

$$\alpha_1 = a_1 a_3 - a_6 a_7; \quad \alpha_2 = a_1 a_4 - a_7^2; \quad \alpha_3 = a_1 a_2 - a_6^2;$$

$$L_2^{-1}(g) \equiv \iint g \, dx \, dx; \quad L_3^{-1}(g) \equiv \iiint g \, dx \, dx \, dx;$$

$$L_4^{-1}(g) \equiv \iiint g \, dx \, dx \, dx \, dx.$$

Константы интегрирования $C_1^{\prime(n)}, \dots, C_8^{\prime(n)}$ на каждом шаге приближения следуют из условий закрепления стержня. При жестком защемлении левого конца стержня и свободном правом торце должны выполняться условия:

$$\begin{aligned}
 x=0: \quad w=w, x=u=\psi=0; \\
 x=l: \quad \psi=N=M=M, x=0. \quad (16)
 \end{aligned}$$

Удовлетворяя решением (15) граничные условия (16) получим:

$$\begin{aligned}
 C_1^{\prime(n)} &= \int q_{\omega}^{\prime(n-1)} dx \Big|_{x=l}; \\
 C_2^{\prime(n)} &= \frac{1}{\beta} \left[\frac{\operatorname{ch}(\beta l)}{\operatorname{sh}(\beta l)} \left(\int g_{\omega_1}^{\prime(n)} \operatorname{sh}(\beta x) dx \Big|_{x=l} - \right. \right. \\
 &- \int g_{\omega_1}^{\prime(n)} \operatorname{sh}(\beta x) dx \Big|_{x=0} - \frac{\gamma_2 p_0}{\beta} (\operatorname{ch}(\beta b) - \operatorname{ch}(\beta a)) + \\
 &+ \left. \frac{\gamma_1 q_0}{\beta^2} (a\beta - b\beta + \operatorname{sh}(\beta b) - \operatorname{sh}(\beta a)) + \frac{\gamma_1 C_1'}{\beta} (1 - \operatorname{ch}(\beta l)) \right] - \\
 &- \int g_{\omega_1}^{\prime(n)} \operatorname{ch}(\beta x) dx \Big|_{x=l} + \gamma_1 C_1' \frac{\operatorname{sh}(\beta l)}{\beta}; \\
 C_3^{\prime(n)} &= \frac{1}{\beta} \int g_{\omega_1}^{\prime(n)}(x) \operatorname{sh}(\beta x) dx \Big|_{x=0} + \frac{1}{\beta^2} (\gamma_2 p_0 (\operatorname{ch}(\beta b) - \\
 &- \operatorname{ch}(\beta a)) - \frac{1}{\beta} \gamma_1 q_0 (a\beta - b\beta + \operatorname{sh}(\beta b) - \operatorname{sh}(\beta a)) + \gamma_1 C_1); \quad (17) \\
 C_4^{\prime(n)} &= -\frac{a_7}{\alpha_2} \int p_{\omega}^{\prime(n-1)} dx \Big|_{x=l} + \frac{a_1}{\alpha_2} L_2^{-1}(q_{\omega}^{\prime(n-1)}) \Big|_{x=l} - \frac{a_1}{\alpha_2} C_1^{\prime(n)} l; \\
 C_5^{\prime(n)} &= \frac{1}{\alpha_2} \left(a_7 \left(p_0 \frac{a^2 - b^2}{2} - L_2^{-1}(p_{\omega}^{\prime(n-1)}) \right) \Big|_{x=0} + \right. \\
 &+ \left. a_1 \left(q_0 \frac{a^3 - b^3}{6} - L_3^{-1}(q_{\omega}^{\prime(n-1)}) \right) \Big|_{x=0} \right); \\
 C_6^{\prime(n)} &= \frac{1}{\alpha_2} \left(a_7 \left(p_0 \frac{b^3 - a^3}{6} - L_3^{-1}(p_{\omega}^{\prime(n-1)}) \right) \Big|_{x=0} \right) - \\
 &- a_1 \left(q_0 \frac{a^4 - b^4}{24} - L_4^{-1}(q_{\omega}^{\prime(n-1)}) \Big|_{x=0} \right) - \alpha_1 \int \psi^{\prime(n)} dx \Big|_{x=0}; \\
 C_7^{\prime(n)} &= -\frac{1}{\alpha_2} \left[a_4 \int p_{\omega}^{\prime(n-1)} dx \Big|_{x=l} - a_7 (L_2^{-1}(p_{\omega}^{\prime(n-1)}) \Big|_{x=l} + C_1^{\prime(n)} l) \right];
 \end{aligned}$$

$$C_8^{(n)} = \frac{1}{\alpha_2} \left(a_4 \left(p_0 \frac{a^2 - b^2}{2} - L_2^{-1} (p_\omega^{(n-1)}) \Big|_{x=0} \right) - a_7 \left(q_0 \frac{b^3 - a^3}{6} - L_3^{-1} (q_\omega^{(n-1)}) \Big|_{x=0} \right) \right).$$

Все интегралы, встречающиеся в решении (15), (17) и далее являются определенными с переменным верхним пределом, т. е.

$$\int f(x) dx \equiv \int_0^x f(z) dz.$$

На первом шаге приближения ($n = 1$) из соотношений (15) следует решение линейной задачи теории упругости.

Повторное знакопеременное нагружение. Пусть, начиная с момента $t = t_1$, осуществляется упругая разгрузка (в рамках гипотез Москвитина [20]) и повторное квазистатическое нагружение усилиями обратного знака, изменяющимися по тому же закону, что и при нагружении из естественного состояния (14):

$$\begin{aligned} q''(x) &= -q_0 (H_0(a-x) - H_0(b-x)); \\ p''(x) &= -p_0 (H_0(a-x) - H_0(b-x)). \end{aligned} \quad (18)$$

Усилия (18) создадут в k -м слое стержня поле перемещений u'' , ψ'' , w'' , деформации $\varepsilon_x^{(k)}$, $\varepsilon_{xz}^{(k)}$, ψ'' и напряжения $\sigma_x^{(k)}$, $s_x^{(k)}$, $\sigma_{xz}^{(k)}$, $\sigma_{xz}^{(3)}$. Сложность нахождения параметров соответствующего напряженно-деформированного состояния заключается в зависимости искомого решения от точки разгрузки (ε_{u1}' , σ_{u1}'), т. к. в каждой точке несущих слоев стержня, которая деформировалась пластически, изменяется предел текучести по деформациям. Это вызывает изменение физических уравнений состояния (3). В нелинейно упругом заполнителе уравнения состояния (5) остаются прежними, т. к. там пластических деформаций не возникает. В результате в каждой точке необходимо ставить свою краевую задачу и получать свое решение. Рассмотрим одну возможность избегания этих трудностей.

Введем разности для всех величин напряженно-деформированного состояния и нагрузки, в которых величины с одним штрихом — напряжения, деформации, внешние нагрузки и перемещения в стержне перед разгрузкой, двумя штрихами помечены аналогичные параметры в процессе второго полуцикла:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(k)*} &= \sigma_x^{(k)} - \sigma_x^{(k)'}; \quad s_x^{(k)*} = s_x^{(k)} - s_x^{(k)'}; \quad \sigma_{xz}^{(k)*} = \sigma_{xz}^{(k)} - \sigma_{xz}^{(k)'}; \\ \sigma_{xz}^{(3)*} &= \sigma_{xz}^{(3)} - \sigma_{xz}^{(3)'}; \quad \varepsilon_x^{(k)*} = \varepsilon_x^{(k)} - \varepsilon_x^{(k)'}; \quad \varepsilon_{xz}^{(k)*} = \varepsilon_{xz}^{(k)} - \varepsilon_{xz}^{(k)'}; \\ \varepsilon^{(k)*} &= \varepsilon^{(k)} - \varepsilon^{(k)'}; \quad q^* = q' - q''; \quad p^* = p' - p''; \\ u^* &= u' - u''; \quad \psi^* = \psi' - \psi''; \quad w^* = w' - w''. \end{aligned} \quad (19)$$

В силу линейности связи деформаций с перемещениями в слоях стержня подобные соотношения будут справедливы и для величин со звездочками.

Для напряжений и деформаций в (19), отмеченных звездочками, для несущих слоев примем физические уравнения состояния типа (3), (5):

$$\begin{aligned} s_x^{(k)*} &= 2G_k f^{(k)*} \varepsilon_x^{(k)*}; \quad \sigma^{(k)*} = 3K_k \varepsilon^{(k)*} \quad (k = 1, 2, 3); \\ s_{xz}^{(3)*} &= 2G_3 f^{(3)*} \varepsilon_{xz}^{(3)*}. \end{aligned} \quad (20)$$

Соответствующие универсальные функции пластичности $f^{(k)*}$ в (20) для материалов несущих слоев согласно гипотезе Москвитина [18, 20] полагаем выраженными через функции пластичности при нагружении из естественного состояния:

$$\begin{aligned} f^{(k)*}(\varepsilon_u^{(k)}) &= \begin{cases} 1, & \varepsilon_u^{(k)*} \leq \varepsilon_y^{(k)*}; \\ 1 - \omega^{(k)*}, & \varepsilon_u^{(k)*} > \varepsilon_y^{(k)*}; \end{cases} \\ \omega^{(k)*} &= \omega^{(k)*}(\varepsilon_u^{(k)*}, \varepsilon_y^{(k)*}, d_m^*), \end{aligned} \quad (21)$$

здесь d_m^* — экспериментальные параметры материала, входящие в аппроксимационную формулу функции нелинейности, например, для сплава Д16Т по аналогии с (4) принимаем:

$$\omega^{(k)*} = \begin{cases} 0, & \varepsilon_u^{(k)*} \leq \varepsilon_y^{(k)*}; \\ A_k^* \left(1 - \frac{\varepsilon_y^{(k)*}}{\varepsilon_u^{(k)*}} \right)^{\alpha_k^*}, & \varepsilon_u^{(k)*} > \varepsilon_y^{(k)*}, \end{cases}$$

где $A_k^* = 0,924$, $\alpha_k^* = 2,27$, $\varepsilon_y^{(k)*} = \alpha_2^{(k)} \varepsilon_y^{(k)}(T_1)$, $\alpha_2^{(k)} = 2,02$ [4, с. 302], причем случай $\alpha_2^{(k)} > 2$ соответствует циклически упрочняющемуся материалу, $\alpha_2^{(k)} < 2$ — разупрочняющемуся, $\alpha_2^{(k)} = 2$ — для циклически идеального материала (нижний индекс «2» обозначает второй полуцикл).

Введем для величин со звездочками величины внутренних усилий, и представим их в виде суммы упругих и неупругих составляющих. Для этого в формулах (2), (6)–(9) нужно формально штрих сверху заменить звездочкой. В результате, с помощью вариационного принципа, придем к системе уравнений равновесия относительно перемещений со звездочками типа (10), которая в рекуррентном виде будет

$$\begin{aligned} a_1 u_{,xxx}^{(n)*} + a_6 \psi_{,xxx}^{(n)*} - a_7 w_{,xxx}^{(n)*} &= p_\omega^{(n-1)*}; \\ a_6 u_{,xxx}^{(n)*} + a_2 \psi_{,xxx}^{(n)*} - a_3 w_{,xxx}^{(n)*} - a_5 \psi_{,xxx}^{(n)*} &= h_\omega^{(n-1)*}; \\ a_7 u_{,xxx}^{(n)*} + a_3 \psi_{,xxx}^{(n)*} - a_4 w_{,xxx}^{(n)*} &= -q^* + q_\omega^{(n-1)*}. \end{aligned} \quad (22)$$

Величины $p_\omega^{(n-1)*}$, $h_\omega^{(n-1)*}$, $q_\omega^{(n-1)*}$ служат поправками на пластичность и физическую нелинейность материалов слоев. Они на первом шаге ($n = 1$) принимаются равными нулю, а в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущего приближения по формулам типа (13) с учетом соотношений (21).

В силу линейности соотношений (19) решения системы (22) должны удовлетворять граничным условиям типа (16). Поэтому, при построении аналитического итерационного решения краевой задачи воспользуемся решением (15). В результате, для перемещений со звездочками будут справедливы итерационные выражения:

$$\begin{aligned} \psi^{(n)*}(x) = & C_2^{(n)*} \operatorname{sh}(\beta x) + C_3^{(n)*} \operatorname{ch}(\beta x) + \\ & + \frac{1}{\beta^2} \left[\gamma_2 p_0^* ((\operatorname{ch}(\beta x - a\beta) - 1)H_0(a-x) - \right. \\ & \quad \left. - (\operatorname{ch}(\beta x - b\beta) - 1)H_0(b-x)) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{\gamma_1 q_0^*}{\beta} ((\beta x - \beta a - \operatorname{sh}(\beta x - \beta a))H_0(a-x) - \right. \\ & \quad \left. - (\beta x - \beta b - \operatorname{sh}(\beta x - \beta b))H_0(b-x)) - \gamma_1 C_1^{(n)*} \right] + \\ & + \frac{1}{\beta} \left[\operatorname{sh}(\beta x) \int_{\omega_1}^{(n)*} \operatorname{ch}(\beta x) dx - \operatorname{ch}(\beta x) \int_{\omega_1}^{(n)*} \operatorname{sh}(\beta x) dx \right]; \\ u^{(n)*}(x) = & \gamma_3 \psi^{(n)*} + \frac{1}{\alpha_2} \left[a_4 L_2^{-1} (p_\omega^{(n-1)*}) - \right. \\ & - a_4 (p_0^* (H_2(a-x) - H_2(b-x)) - a_2 q_0^* (H_3(a-x) - \\ & \left. - H_3(b-x))) - L_3^{-1} (q_\omega^{(n-1)*}) + \frac{a_7}{2} C_1^{(n)*} x^2 \right] + C_7^{(n)*} x + C_8^{(n)*}; \\ w^{(n)*}(x) = & \frac{1}{\alpha_2} \left[\alpha_1 \int \psi^{(n)*} dx + a_7 (p_0^* (H_3(a-x) - H_3(b-x)) + \right. \\ & \left. + L_3^{-1} (p_\omega^{(n-1)*})) + a_1 (q_0^* (H_4(a-x) - H_4(b-x)) - L_4^{-1} (q_\omega^{(n-1)*})) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{6} a_1 C_1^{(n)*} x^3 \right] + \frac{1}{2} C_4^{(n)*} x^2 + C_5^{(n)*} x + C_6^{(n)*}, \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$g_{\omega_1}^{(n)*}(x) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \gamma_1 h_\omega^{(n-1)*} - \gamma_2 p_\omega^{(n-1)*} - \gamma_1 \left(\int q_\omega^{(n-1)*} dx + C_1^{(n)*} \right);$$

$$\begin{aligned} \int \psi^{(n)*} dx \Big|_{x=0} = & \frac{C_2^{(n)*}}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{\gamma_2 p_0^*}{\beta} (\operatorname{sh}(\beta b) - \operatorname{sh}(\beta a)) + \right. \\ & \left. + \frac{\gamma_1 q_0^*}{\beta^2} ((\operatorname{ch}(\beta a) - \operatorname{ch}(\beta b)) - \frac{1}{2} \gamma_1 q_0^* (a^2 - b^2)) \right] + \\ & + \frac{1}{\beta} \int (\operatorname{sh}(\beta x) \int_{\omega_1}^{(n)*} \operatorname{ch}(\beta x) dx - \operatorname{ch}(\beta x) \int_{\omega_1}^{(n)*} \operatorname{sh}(\beta x) dx) dx \Big|_{x=0}. \end{aligned}$$

Подставляя решение (23) в граничные условия типа (16), получим для констант интегрирования $C_1^{(n)*}, \dots, C_8^{(n)*}$ выражения, совпадающие с (17), если в последних штрих заменить звездочкой. Следовательно, формулы (23) дают в итерациях аналитическое решение краевой задачи в перемещениях для величин со звездочками при повторном локальном знакопеременном нагружении консольного трехслойного стержня.

После этого параметры напряженно-деформированного состояния на втором полуцикле нагружения получим из соотношений (19):

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(k)}(x, z) = & \sigma_x^{(k)}(x, z) - \sigma_x^{(k)*}(x, z); \\ \sigma_{xz}^{(3)}(x, z) = & \sigma_{xz}^{(3)}(x, z) - \sigma_{xz}^{(3)*}(x, z); \\ \varepsilon_x^{(k)}(x, z) = & \varepsilon_x^{(k)}(x, z) - \varepsilon_x^{(k)*}(x, z); \\ u''(x) = & u'(x) - u^*(x); \end{aligned} \quad (24)$$

$$\psi''(x) = \psi'(x) - \psi^*(x); w''(x) = w'(x) - w^*(x),$$

где величины с одним штрихом — напряжения, деформации и перемещения в трехслойном стержне перед разгрузкой.

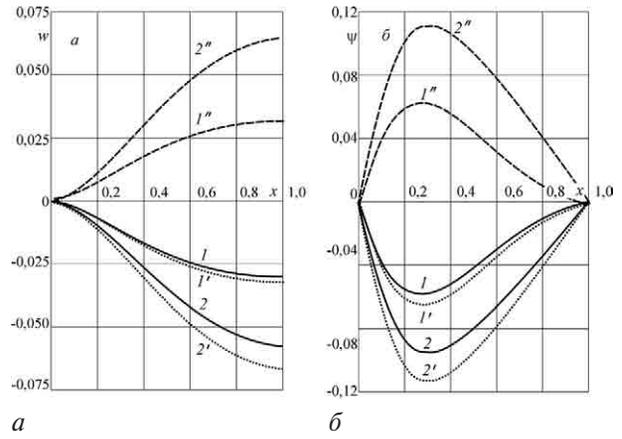


Рисунок 2 — Зависимость прогиба (а) и сдвига (б) трехслойного стержня при различных нагрузках

Численные результаты. При численной реализации решения принимались относительные толщины слоев $h_1 = 0,02, h_2 = 0,04, c = 0,09$. Нагрузка с интенсивностью $q_0 = -3,5$ МПа ($p_0 = 0$) равномерно распределена на отрезке $[0, b]$. Материалы слоев: сплав Д16Т–фторопласт-4–Д16Т, механические параметры материалов взяты в [4, с. 302, с. 312–313].

Сходимость метода упругих решений доказана при весьма общих предположениях [4]. В нашем случае численный счет подтвердил практическую сходимость метода итераций. За искомое решение принято 8-е приближение, которое отличается от предыдущего менее чем на 1%. Далее: кривые без штриха — упругий стержень, один штрих — упругопластическое деформирование, два штриха — переменное нагружение.

На рисунке 2 а, б показано изменение прогиба и сдвига в заполнителе вдоль оси стержня единичной длины в зависимости от длины участка, на котором действует распределенная нагрузка (без штриха — упругий стержень, один штрих — упругопластический, два штриха — переменное нагружение): 1 — $b = 0,75$; 2 — $b = 1$.

Экстремумы перемещений при повторном нагружении в случае меньшей площади нагрузки уменьшаются в меньшей степени, чем с нагрузкой по всей поверхности стержня. Это объясняется меньшей областью пластических деформаций и, вследствие этого, уменьшением циклического упрочнения материала несущих слоев.

Распределение нормальных напряжений σ_{xx} по сечению в заделке ($x = 0$) консольного стержня иллюстрирует рисунок 3 (без штриха — упругий стержень, один штрих — упругопластический, два штриха — переменное нагружение): 1 — $b = 0,75$; 2 — $b = 1$. Здесь напряжения в несущих слоях отличаются на 5–6%, что объясняется их различной толщиной. Учет физической нелинейности приводит к увеличению максимальных напряжений во внешних слоях на 5%, в заполнителе — на 14%.

Выводы. Предложенная методика позволит исследовать напряженно-деформированное состо-

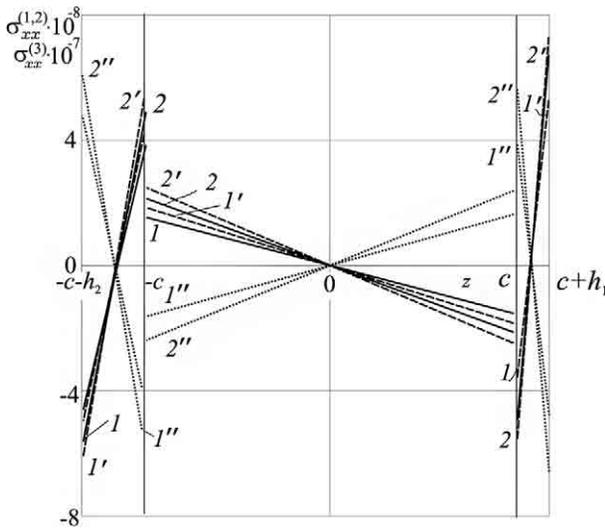


Рисунок 3 — Изменение напряжений по толщине трехслойного стержня при различных нагрузках

ание трехслойного упругопластического стержня при повторных и циклических локальных прямоугольных нагрузках. При этом решение новой краевой задачи строится по известному решению соответствующей задачи о нагружении из естественного состояния.

Работа выполнена в рамках ГПНИ «Конвергенция».

Список обозначений

- $q'(x), p'(x)$ — внешняя распределенная нагрузка;
- q_0, p_0 — интенсивности распределенной нагрузки;
- $w'(x)$ — прогиб стержня;
- $\psi'(x)$ — относительный сдвиг в заполнителе;
- $u'(x)$ — продольное перемещение срединной плоскости заполнителя;
- G_k, K_k — модули сдвига и объемной деформации;
- h_k — толщины слоев;
- $f^{(k)}$ — функция пластичности Ильюшина при нагружении из естественного состояния;
- $f^{(3)}$ — универсальная функция, описывающая физическую нелинейность заполнителя;
- $\epsilon_u^{(k)}$ — интенсивность деформаций;
- $\epsilon_y^{(k)}$ — деформационный предел текучести материала;
- $\epsilon_s^{(3)}$ — предел физической нелинейности материала заполнителя;
- $s_{ij}^{(k)}, \epsilon_{ij}^{(k)}$ — девиаторы напряжений и деформаций;
- $\sigma^{(k)}, \epsilon^{(k)}$ — шаровые тензоры напряжений и деформаций;
- $\omega^{(k)}$ — функция нелинейности (пластичности);
- $H_0(x)$ — функция Хевисайда.

Список литературы

1. Болотин, В.В. Механика многослойных конструкций / В.В. Болотин, Ю.Н. Новичков. — М.: Машиностроение, 1980. — 375 с.

2. Головкин, К.Г. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках / К.Г. Головкин, П.З. Луговой, В.Ф. Мейш. — Киев, 2012. — 541 с.

3. Плескачевский, Ю.М. Динамика металлополимерных систем / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. — Минск: Беларусь, 2004. — 386 с.

4. Журавков, М.А. Математические модели сплошных сред. Теория упругости и пластичности / М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов. — Минск: БГУ, 2011. — 540 с.

5. Škec L., Jelenić G. Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection // Acta Mechanica. — 2014. — Vol. 225, Is. 2. — Pp. 523–541.

6. Hohe, J. An energetic homogenization procedure for the elastic properties of general cellular sandwich cores / J. Hohe, W. Becker // Composites. Part B: Engineering. — 2001. — Vol. 32, Is. 3. — Pp. 185–197.

7. The oblique impact response of composite sandwich plates / I. Ivañez [et al.] // Composite Structures. — 2015. — № 133. — Pp. 1127–1136.

8. Янковский, А.П. Анализ ползучести армированных балок-стенок из нелинейно-наследственных материалов в рамках второго варианта теории Тимошенко / А.П. Янковский // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2014. — Т. 20, № 3. — С. 469–489.

9. Горшков, А.Г. Гармоническое нагружение слоистых вязкоупругопластических систем / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая // Изв. РАН. Механика твердого тела. — 2000. — № 6. — С. 91–98.

10. Старовойтов, Э.И. Изгиб прямоугольной трехслойной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Е.П. Доровская // Проблемы машиностроения и автоматизации. — 2006. — № 3. — С. 45–50.

11. Старовойтов, Э.И. Термоупругий изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, М. Сулейман // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. — 2006. — № 4. — С. 55–62.

12. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойного стержня в температурном поле / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. — 2013. — № 1(22). — С. 31–35.

13. Горшков, А.Г. Колебания трехслойных стержней под действием локальных нагрузок различных форм / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. — 2004. — № 1. — С. 45–52.

14. Grover, N. An Inverse Trigonometric Shear Deformation Theory for Supersonic Flutter Characteristics of Multilayered Composite Plates / N. Grover, B.N. Singh, D.K. Maiti // Aerospace Science and Technology. — 2016. — Vol. 52. — Pp. 41–51.

15. Kulikov, G.M. Advanced formulation for laminated composite shells: 3D stress analysis and rigid-body motions / G.M. Kulikov, S.V. Plotnikova // Composite Structures. — 2013. — Vol. 95. — Pp. 236–246.

16. Starovoitov, E.I. Circular sandwich plates under local impulsive loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // International Applied Mechanics. — 2003. — Vol. 39, Is. 8. — Pp. 945–952.

17. Плескачевский, Ю.М. Динамика круговых металлополимерных пластин на упругом основании. Ч. 1: Свободные колебания / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. — 2008. — № 4(5). — С. 48–52.

18. Москвитин, В.В. К исследованию напряженно-деформированного состояния двухслойных металлополимерных пластин при циклических нагружениях / В.В. Москвитин, Э.И. Старовойтов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1986. — № 1. — С. 116–121.

19. Ильюшин, А.А. Пластичность. Ч. 1: Упругопластические деформации / А.А. Ильюшин. — М.: Гостехиздат, 1948. — 376 с.

20. Москвитин, В. В. Циклическое нагружение элементов конструкций / В.В. Москвитин. — М.: Наука, 1981. — 344 с.

ZHURAVKOV Mikhail A., D. Sc. in Phys.-Math., Prof.

Minister of Education of the Republic of Belarus

E-mail: zhuravkov@bsu.by

Ministry of Education of the Republic of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

STAROVOYTOV Eduard I., D. Sc. in Phys.-Math., Prof.

Head of the Department "Structural Mechanics"¹

E-mail: edstar0@yandex.by

LEONENKO Denis V., D. Sc. in Phys.-Math., Assoc. Prof.

Professor of the Department "Structural Mechanics"¹

E-mail: leoden@tut.by

¹Belarusian State University of Transport, Gomel, Republic of Belarus

Received 23 March 2016.

THE SECOND DEFORMATION OF THE THREE-LAYER ELASTOPLASTIC ROD BY LOCAL LOAD

Within the framework of the theory of small elastoplastic deformations one class of simple variables local loading of sandwich bars of rectangular transverse-cross section with elastoplastic bearing layers and physically nonlinear elastic fillers, for which the possibility of constructing a solution of the boundary value problem under repeated loading is indicated, if the solution during loading from the natural state is known (hypothesis of Moskvitin). The paper shows the formulation and methodology of solving boundary value problem of the deformation of the three-layer asymmetric thickness of the rod by repeated exposure to the local rectangular load. To describe the kinematics of asymmetrical thickness rod package were adopted by the broken normal hypothesis: in thin layers bearing valid hypo-theses Bernoulli, in a hard incompressible thickness relatively thick filler normal is straight. It does not change its length, but some extra turns at an angle. The equilibrium equations are derived using the Variational method of Lagrange the work of the filler in the tangential direction is taken into account. Analytic solutions of problems of the theory of small elastic deformations during the forward and backward on-laden are obtained by the method of elastic solutions Ilyushin. The numerical analysis of the solutions is given.

Keywords: second local loading, plasticity, three-layer beam

References

1. Bolotin V.V., Novichkov Yu.N. *Mekhanika mnogosloynkh konstruksii* [Mechanics of Layered Structures]. Moscow, Mashinostroenie, 1980. 375 p. (in Russian).
2. Golovko K.G., Lugovoy P.Z., Meysh V.F. *Dinamika neodnorodnykh obolochek pri ne-stacionarnykh nagruzkah* [The Dynamics of Inhomogeneous Shells under Transient Load Conditions]. Kiev: Kievskij universitet, 2012. 541 p. (in Russian).
3. Pleskatshevskiy U.M., Starovoytov E.I., Yarovaya A.V. *Dinamika metalopolimernykh sistem* [Dynamics of Metal-polymeric Systems]. Minsk, Belaruskaja navuka, 2004. 386 p. (in Russian).
4. Zhuravkov M.A., Starovoytov E.I. *Matematicheskie modeli sploshnykh sred. Teorija uprugosti i plastichnosti* [Mathematical models of continuous media. The theory of Elasticity and Plasticity]. Minsk, BSU, 2011. 540 p. (in Russian).
5. Škec L., Jelenić G. Analysis of a Geometrically Exact Multi-layer Beam with a Rigid Interlayer Connection. *Acta Mechanica*, 2014, vol. 225, no. 2, pp. 523–541. doi: 10.1007/s00707-013-0972-5.
6. Hohe J., Becker W. An Energetic Homogenisation Procedure for the Elastic Properties of Eneal Cellular Sandwich Cores. *Composites Part B-Engineering*, 2001, issue 3, vol. 32, pp. 185–197.
7. Ivañez I., Moure M.M., Garcia-Castillo S.K., Sanchez-Saez S. The Oblique Impact Response of Composite Sandwich Plates. *Composite Structures*, 2015, no. 133, pp. 1127–1136.
8. Yankovskii A.P. Analysis of Creep of Reinforced Beams-wall from Nonlinear-hereditary Materials within of the Second Variant of Tymoshenko Theory. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksij* [Mechanics of Composite Materials and Designs], 2014, vol. 20, no. 3, pp. 469–489. (in Russian)
9. Gorshkov A.G., Starovoytov E.I., Yarovay A.V. Harmonic Loading Viscoelasticoplastic Layered Systems. *Izvestija Rossijskoj akademii nauk. Mehanika tverdogo tela* [Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solids], 2000, no. 6, pp. 91–98. (in Russian).
10. Starovoytov E.I., Dorovskaya E.P. Bending of Rectangular Sandwich Plate on an Elastic Foundation. *Problemy mashinostroeniya i avtomatizatsii* [Engineering and Automation Problems], 2006, no. 3, pp. 45–50. (in Russian).
11. Starovoytov E.I., Leonenko D.V., Suleyman M. Thermoelastic Bending of Ring Sandwich Plate on Elastic Foundation. *Ekologicheskij vestnik nauchnykh centrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Journal of Environmental science centers Black Sea Economic Cooperation], 2006, no. 4, pp. 55–62. (in Russian).
12. Starovoytov E.I., Leonenko D.V. Deformation of Three-layer Beam in a Temperature Field. *Mekhanika mashin, mehanizmov i materialov* [Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials], 2013, no. 1(22), pp. 31–35. (In Russian).
13. Gorshkov A.G., Starovoytov E.I., Leonenko D.V. Vibrations of Sandwich Beams under the Action of Local Loads of the Different Forms. *Ekologicheskij vestnik nauchnykh centrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Journal of Environmental science centers Black Sea Economic Cooperation], 2004, no. 1, pp. 45–52. (in Russian).
14. Grover N., Singh B.N., Maiti D.K. An Inverse Trigonometric Shear Deformation Theory for Supersonic Flutter Characteristics of Multilayered Composite Plates. *Aerospace Science and Technology*, 2016, vol. 52, pp. 41–51.
15. Kulikov G.M., Plotnikova S.V. Advanced Formulation for Laminated Composite Shells: 3D Stress Analysis and Rigid-body Motions. *Composite Structures*, 2013, vol. 95, pp. 236–246.

16. Starovoytov E.I., Leonenko D.V., Yarovaya A.V. Circular Sandwich Plates under Local Impulsive Loads. *International Applied Mechanics*, 2003, vol. 39, no. 8, pp. 945–952.
17. Pleskatshevskiy Y.M., Starovoytov E.I., Leonenko D.V. Dynamics of Circular Metal-polymeric Plates on an Elastic Foundation. Part 1. Free Vibrations. *Mehanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials], 2008, no. 4(5), pp. 48–52. (in Russian).
18. Moskvitin V.V., Starovoytov E.I. On the Study of Stress-Strain State of Multilayered Metal-Plates under Cyclic Loading. *Izvestija Akademii nauk SSSR. Mehanika tverdogo tela* [Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR. Mechanics of Solids], 1986, no. 1, pp. 116–121. (in Russian).
19. Ilyushin A.A. *Plastichnost'. Ch. 1. Uprugoplasticheskie deformacii* [Plastic. P. 1. Elastoplastic Deformations]. Moscow, Gostehizdat, 1948. 376 p. (In Russian).
20. Moskvitin V.V. *Ciklichesкое nagruzhenie jelementov konstrukcij* [Cyclic Loading of Structural Elements]. Moscow, Nauka, 1981. 344 p. (in Russian).