МЕХАНИКА МОБИЛЬНЫХ МАШИН

УДК 621.01: 534

В.Б. АЛЬГИН, д-р техн. наук, проф.
заместитель генерального директора по научной работе[1]
E-mail: vladimir.algin@gmail.com

А.М. ГОМАН, канд. техн. наук, доц.
начальник отдела динамического анализа и вибродиагностики машин[1]
E-mail: ark.goman@gmail.com

В.В. ШПОРТЬКО
младший научный сотрудник отдела динамического анализа и вибродиагностики машин[1]
E-mail: llii7pot@yandex.ru

Т.С. ЛОГВИНЕЦ
младший научный сотрудник отдела динамического анализа и вибродиагностики машин[1]
E-mail: tanka-tane4ka@mail.ru

[1]Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси, г. Минск, Республика Беларусь

Поступила в редакцию 02.08.2018.

МЕТОДИКА РАСЧЕТА ЧАСТОТ И ФОРМ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ СО МНОЖЕСТВОМ ВОЗМОЖНЫХ СОСТОЯНИЙ

Рассматриваются методические подходы к определению частот и форм собственных колебаний трансмиссий мобильных машин и им подобных плохо обусловленных систем с широким спектром собственных частот и многими состояниями. Задача решается в общей постановке, учитывающей характерные особенности трансмиссии при ее схематизации. Расчет сводится к вычислению собственных значений и собственных векторов матрицы специального вида. Используется подход, основанный на предварительном приведении матрицы к симметричному виду и применении итерационного численного метода вращений Якоби. Это дает возможность находить все собственные частоты и формы колебаний плохо обусловленных систем с очень высокой точностью. Процесс формирования матрицы жесткости системы автоматизируется путем замены абсолютно жестких звеньев (при их наличии) на звенья с конечной жесткостью. Для составления уравнений собственных колебаний систем со множеством возможных состояний предлагается использовать индикаторы состояния устройств с переменной структурой. Такой подход позволяет получить универсальные уравнения, описывающие движение системы при любом ее возможном состоянии. На основе разработанной методики создана и зарегистрирована компьютерная программа, приведен пример ее применения.

Ключевые слова: *трансмиссия, частоты и формы собственных колебаний, методика, механическая система со множеством возможных состояний, индикатор состояния*

Введение. При исследовании динамических процессов в механических системах одна из основных задач заключается в определении их частот и форм собственных колебаний.

Для проведения динамического анализа трансмиссия мобильной машины схематизируется в виде механической системы с сосредоточенными параметрами. Трансмиссионные системы характеризуются наличием в них дифференциальных механизмов, разветвленных и кольцевых участков. Часто возникает необходимость одновременно исследовать крутильные колебания в трансмиссии и колебания, совершаемые подвеской, рамой и поступательно движущейся массой автомобиля. Следовательно, рассматриваемые системы достаточно разнообразны как по структуре, так и по типам входящих в их состав элементов.

Трансмиссии мобильных машин отличаются переменностью структуры, связанной с наличием множества состояний элементов управления (включен/выключен). При расчетах трансмиссионных систем, особенно планетарных со сложной конфигурацией, обычно их упрощают, заменяя планетарные подсистемы линейными цепными фрагментами, для каждого состояния (передачи) трансмиссии записывают новую систему уравнений. Это снижает точность расчета и многократно увеличивает затраты на подготовку расчетных моделей. Поэтому целесообразно разработать методику, основанную на универсальной (единой) математической модели, для вычисления собственных частот и форм трансмиссии как системы со многими состояниями.

Таким образом, создание методики и программного обеспечения для расчета собственных частот и форм трансмиссий произвольной конфигурации с использованием современных программно-аппаратных средств представляет собой актуальную задачу.

О выборе метода определения собственных частот и форм. Задача определения собственных частот и форм колебаний механических систем с сосредоточенными параметрами относится к классическим, разработано множество методов ее решения. Их большое разнообразие обусловлено тем, какие характеристики системы находятся (одна или несколько низших или высших собственных частот и соответствующих им форм, только собственные частоты без расчета собственных форм, все собственные частоты и соответствующие им формы) и для систем какого вида они могут применяться (по структуре — цепные, разветвленные, кольцевые; по типам входящих элементов — однородные поступательные или вращательные, поступательно-вращательные).

Известен ряд приближенных методов для нахождения одной или нескольких низших или высших собственных частот и форм колебаний *однородных механических систем*: поступательных (массы, соединенные пружинами), балочных либо вращательных (диски на валу). К ним относятся методы Рэлея, Граммеля, Донкерлея, Папковича, спектральной функции С.А. Бернштейна, Ритца, Бубнова–Галеркина, последовательных приближений (итераций) [1–12].

Методы динамических податливостей и динамических жесткостей (методы гармонических коэффициентов влияния) [1, 3, 13] позволяют определять все собственные частоты *цепных систем*, а метод динамических жесткостей пригоден также для расчета *разветвленных и кольцевых систем*. Метод начальных параметров в применении к задаче о крутильных колебаниях системы, схематизированной в виде невесомого вала с дисками, — метод Толле (метод остатка) [1–3, 13] используется для нахождения всех частот и форм колебаний *цепных систем* или отдельных ветвей разветвленных и кольцевых систем. Метод В.П. Терских (метод цепных дробей) [1, 13] применяется к расчету крутильных колебаний валов с дисками и позволяет определять все собственные частоты и формы *цепных, разветвленных и кольцевых систем*.

Метод Хольцера [2, 11, 12] используется для вычисления всех частот и форм *цепных, разветвленных и кольцевых систем*, совершающих вращательное или поступательное движение.

Все перечисленные выше методы разработаны много лет назад и из-за этого ориентированы на «ручной» счет, некоторые из них находят применение к объектам специального вида.

При исследованиях мобильных машин часто рассматриваются вращательные и комбинированные системы с разветвлениями на дифференциальных механизмах, совместные колебания вращательных и поступательных систем. То есть системы весьма разнообразны и обладают большим числом степеней свободы. Поэтому необходимо использовать универсальные методы, ориентированные на применение ЭВМ.

В современных работах при расчете частот трансмиссии во многих случаях используют упрощение расчетных схем (хотя для нынешнего уровня развития ЭВМ это не является необходимым), при изменении структуры трансмиссии всякий раз составляют новую систему уравнений собственных колебаний, что также нерационально [14].

Цель статьи — разработка методики и основанной на ней программы для расчета частот и форм собственных колебаний механических систем произвольной структуры со множеством возможных состояний, что является наиболее общим случаем из известных постановок задач в рассматриваемой области.

Уравнения собственных колебаний для широкого класса механических систем с сосредоточенными параметрами можно представить в матричной форме:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = 0,$$

где $\mathbf{q}$ — вектор-столбец обобщенных перемещений; $\ddot{\mathbf{q}}$ — вектор-столбец обобщенных ускорений; $\mathbf{A}$ — матрица инерции системы; $\mathbf{C}$ — матрица жесткости системы.

Из методов, основанных на использовании стандартных математических операций, пригодных для практических расчетов механических систем произвольной конфигурации, т. е. методов, имеющих универсальный характер, целесообразен подход, описанный в работе [15]. Подход основан на сведении задачи расчета частот и форм собственных колебаний к известной математической процедуре определения собственных значений и собственных векторов матрицы специального вида $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$ [8, 12, 15, 16], где $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$ — действительные симметричные матрицы и $\mathbf{A}$ — положительно определенная.

Процедура расчета собственных значений и собственных векторов матриц рассматривается в линейной алгебре. При этом используются различные численные методы решения проблемы собственных значений, которые делятся на две группы: прямые (точные) методы и итерационные.

Прямые методы основаны на вычислении коэффициентов характеристического многочлена матрицы и последующем нахождении его корней (методы Крылова, Данилевского, Леверрье—Фаддеева, Хессенберга, Самуэльсона и др.) [9, 16–20]. Собственные векторы матрицы обычно удается определить, используя промежуточные результаты вычислений.

В итерационных методах собственные значения находятся как пределы некоторых числовых последовательностей без предварительного определения коэффициентов характеристического многочлена. Для решения полной проблемы собственных значений существует множество итерационных методов, основанных на построении бесконечной последовательности преобразований подобия исходной матрицы, приводящих ее в пределе к некоторому простому виду (диагональному, трехдиагональному, треугольному, почти треугольному, квазидиагональному или квазитреугольному), позволяющему легко определить собственные значения. Отвечающие им собственные векторы находятся с использованием полученных в процессе вычислений преобразующих матриц. К указанным методам относятся: метод вращений Якоби, обобщенный метод вращений, ортогональный степенной метод, треугольный степенной метод, QR-алгоритм, LR-алгоритм, ΛP-алгоритм и др. [16, 17, 19–24].

Особенность расчетных динамических схем трансмиссий заключается в том, что величины параметров их элементов (моменты инерции масс и жесткости упругих связей) могут отличаться на несколько порядков (в 1000 и более раз), т. е. такие схемы имеют плохую обусловленность. Использование прямых матричных численных методов для анализа плохо обусловленных схем даже с небольшим числом степеней свободы (6–10) приводит к потере точности вследствие округления и быстрому накоплению погрешностей вычислений, вследствие чего полученные результаты могут оказаться неверными.

Для определения всех собственных значений и собственных векторов матрицы $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$ используется подход, основанный на применении итерационного численного метода вращений Якоби [16, 17, 19–29]. Данный метод позволяет находить все собственные значения и собственные векторы вещественной симметричной матрицы с очень высокой точностью [26]. Поскольку матрица $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$ в общем случае несимметричная, выполняется ее предварительное преобразование к симметричному положительно определенному или положительно полуопределенному виду путем соответствующего выбора координат [4, 23].

При расчете собственных частот и форм трансмиссии, представленной в виде многомассовой крутильной динамической схемы, матрица инерции является диагональной:

$$\mathbf{A} = \mathrm{diag}(J_1, \ldots, J_n),$$

где $J_1, \ldots, J_n$ — моменты инерции сосредоточенных масс. Матрица $\mathbf{A}$ невырожденная, поэтому для нее существует обратная $\mathbf{A}^{-1} = \mathrm{diag}(J_1^{-1}, \ldots, J_n^{-1})$. Представим матрицу $\mathbf{A}^{-1}$ в виде произведения $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{A}^{-1/2}$, где $\mathbf{A}^{-1/2} = \mathrm{diag}(J_1^{-1/2}, \ldots, J_n^{-1/2})$. Тогда несимметричная матрица $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$ подобна симметричной матрице $\mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1/2}$ с преобразующей матрицей $\mathbf{A}^{-1/2}$. На основании свойств подобных матриц [17, 24, 30] собственные значения матриц $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$ и $\mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1/2}$ совпадают, а собственные векторы матрицы $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$ получаются из собственных векторов матрицы $\mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1/2}$ путем умножения их слева на матрицу $\mathbf{A}^{-1/2}$.

В методе Якоби выполняются преобразования подобия с применением ортогональных матриц, которые не изменяют сферическую (евклидову, фробениусову) норму исходной матрицы [21, 22, 26, 28, 30], т. е. сумма квадратов всех элементов преобразуемой матрицы сохраняется. При соответствующем преобразовании координат сохраняется метрика пространства. Поэтому даже для плохо обусловленных матриц не происходит значительного накопления погрешностей вычислений и точность полученных результатов является очень высокой. Метод Якоби, в отличие от других методов, позволяет одновременно достаточно точно находить как малые, так и большие по величине собственные значения; при этом малые собственные значения и отвечающие им собственные векторы иногда вычисляются с гораздо большей точностью, чем в других методах [23]. Кратные и близкие собственные значения получаются с такой же точностью, как и простые [26, 29].

Для вычисления собственных частот и форм динамических схем, матрица инерции $\mathbf{A}$ которых недиагональная (в общем случае — полностью заполненная), что на практике встречается редко, необходимо решать обобщенную проблему (задачу) собственных значений $\mathbf{Cx} = \lambda\mathbf{Ax}$ [4, 16, 20–22, 31]. Ее можно свести к стандартной проблеме собственных значений $\mathbf{Bx} = \lambda\mathbf{x}$, используя разложение симметричной положительно определенной матрицы $\mathbf{A}$ по методу квадратного корня Холецкого или спектральное разложение этой матрицы.

О подходах к расчету собственных частот и форм трансмиссии как системы со многими состояниями. Трансмиссия отличается разнообразием структурного представления. Ее состояние изменяется на каждой передаче, то есть она представляет собой систему со множеством возможных состояний. Для формирования уравнений собственных колебаний таких систем целесообразно использовать универсальные уравнения, содержащие индикаторы состояния. Ранее такой подход применялся только при моделировании динамики движения машины, ее переходных процессов, в которых изменяется состояние фрикционных элементов трансмиссии, происходит пробуксовка движителей [32, 33].

Особенности задачи расчета собственных частот и форм рассматриваются на конкретном примере. На рисунке 1 *а* показана четырехмассовая динамическая схема с упругим звеном, жестким дифференциалом и двумя фрикционными элементами.

Введение конечных жесткостей устройств. Реальных механических объектов с абсолютной жесткостью не существует, их использование связано с идеализацией свойств при схематизации. Введение устройств с конечной жесткостью позволяет упростить составление уравнений собственных колебаний и автоматизировать процесс формирования матрицы жесткости динамической схемы.

Замена абсолютно жестких устройств на объекты с конечной жесткостью приводит к увеличению числа степеней свободы схемы и появлению дополнительных высших собственных частот, вследствие чего ухудшается обусловленность схемы. Однако это позволяет применять единый подход к формированию матриц жесткости схем, содержащих только упругие звенья, и схем, включающих также звенья с абсолютной жесткостью.

Каждая такая замена добавляет системе высокую собственную частоту, что необходимо учитывать при анализе результатов. Чтобы не были искажены собственные частоты исходной системы, конечный уровень вводимых жесткостей C_0 должен быть существенно выше, чем у устройств исходной системы. Поэтому уровень вводимых жесткостей может быть принят в пределах [32]:

$$C_0 = C_{max}(10^5 \div 10^6), \qquad (1)$$

где C_{max} — наибольшая из жесткостей упругих звеньев расчетной динамической схемы. Использование более высоких значений может привести к вычислительным проблемам.

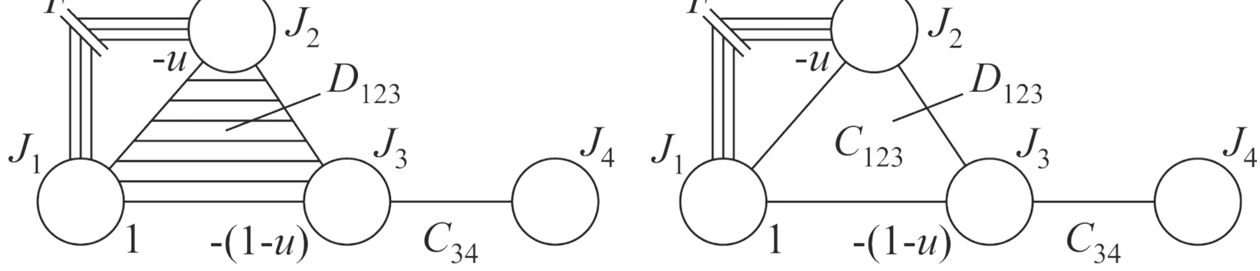
Жесткий дифференциал D_{123} (см. рисунок 1 *a*) наделяется конечной жесткостью C_{123} (см. рисунок 1 *b*). При включении муфты F и тормоза T образуются жесткие связи, которые при расчете также наделяются конечными жесткостями.

Уравнения собственных колебаний динамической схемы на рисунке 1 *б* имеют вид

$$\begin{cases} J_1\ddot{\varphi}_1 + C_{123}[\varphi_1 - u\varphi_2 - (1-u)\varphi_3] + L_F C_F(\varphi_1 - \varphi_2) = 0; \\ J_2\ddot{\varphi}_2 - uC_{123}[\varphi_1 - u\varphi_2 - (1-u)\varphi_3] - L_F C_F(\varphi_1 - \varphi_2) + \\ + L_T C_T \varphi_2 = 0; \\ J_3\ddot{\varphi}_3 - (1-u)C_{123}[\varphi_1 - u\varphi_2 - (1-u)\varphi_3] + \\ + C_{34}(\varphi_3 - \varphi_4) = 0; \\ J_4\ddot{\varphi}_4 - C_{34}(\varphi_3 - \varphi_4) = 0, \end{cases} \qquad (2)$$

где J_i $(i = \overline{1,4})$ — моменты инерции сосредоточенных масс; $\varphi_i, \ddot{\varphi}_i$ $(i = \overline{1,4})$ — угловые перемещения и угловые ускорения масс; C_{123} — жесткость упругого дифференциала в приведении к первому звену; C_{34} — жесткость упругого звена; C_F, C_T — жесткости упругого и реактивного звеньев, образующихся при включении муфты F и тормоза T соответственно; u — внутреннее передаточное отношение дифференциала от массы J_1 к массе J_2 при остановленной массе J_3 [15]. Выражение $C_{123}[\varphi_1 - u\varphi_2 - (1 - u)\varphi_3]$ представляет собой внутренний момент дифференциала, действующий на его первое звено J_1.

Использование индикаторов состояния L. В уравнениях (2) для муфты F и тормоза T использованы индикаторы состояния L_F и L_T. При



a *b*

Рисунок 1 — Четырехмассовая динамическая схема с различными типами устройств:
a — с жестким дифференциалом; *b* — с дифференциалом, имеющим конечную жесткость
Figure 1 — Four-mass dynamic scheme with different types of devices: *a* — with rigid differential; *b* — with differential having finite stiffness

этом принято, что значение $L = 1$ соответствует замкнутому состоянию этих устройств, а $L = 0$ — разомкнутому.

Уравнения (2) представляют собой записанные в универсальной форме уравнения собственных колебаний динамической схемы на рисунке 1 *b* при любом ее возможном состоянии.

Матрица инерции и матрица жесткости динамической схемы имеют вид

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_4 \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} C_{123} + L_F C_F & -uC_{123} - L_F C_F & -(1-u)C_{123} & 0 \\ -uC_{123} - L_F C_F & u^2 C_{123} + L_F C_F + L_T C_T & u(1-u)C_{123} & 0 \\ -(1-u)C_{123} & u(1-u)C_{123} & (1-u)^2 C_{123} + C_{34} & -C_{34} \\ 0 & 0 & -C_{34} & C_{34} \end{vmatrix}.$$

Рассматриваются два возможных состояния динамической схемы: с замкнутой муфтой F и разомкнутым тормозом T; с замкнутым тормозом T и разомкнутой муфтой F. Параметры схемы (моменты инерции масс J, кг·м^2, жесткости упругих звеньев C, Н·м/рад, передаточное отношение дифференциала u) приведены в таблице 1. Значения жесткостей C_{123}, C_F и C_T приняты одинаковыми и равными уровню C_0, определяемому по формуле (1).

Для первого возможного состояния схемы значения индикаторов состояния $L_F = 1$, $L_T = 0$, для второго возможного состояния — $L_F = 0$, $L_T = 1$.

Расчеты выполнены с использованием разработанной авторами статьи зарегистрированной программы «Расчет частот и форм собственных колебаний механических систем произвольной структуры со множеством возможных состояний» [34].

Программа реализована на языке программирования C# и предназначена для вычисления частот и форм собственных колебаний линейных механических систем с сосредоточенными параметрами без демпфирования. Она позволяет рассчитывать регулярные механические системы [33], как однородные поступательные или вращательные, так и поступательно-вращательные. Программа пригодна для расчета систем различной структуры: цепных, разветвленных, кольцевых, с реактивными звеньями, содержащих зубчатые передачи и дифференциалы. Системы, имеющие множество возможных состояний, исследуются с применением индикаторов состояния муфт и тормозов.

При проведении расчетов в программе уравнения собственных колебаний не используются, а сразу формируются матрицы инерции и жесткости динамической схемы на основе ее структуры и значений параметров.

Результаты расчета собственных частот и форм колебаний представлены в таблице 2.

Динамическая схема на рисунке 1 *a* является полуопределенной [12], поэтому низшая (первая) собственная частота колебаний такой системы равна нулю. Полученные расчетом для схемы на рисунке 1 *b* значения ω_1 близки к нулю, но не равны нулю в точности за счет введения для жестких соединительных элементов конечных величин жесткости и неизбежно возникающих при вычислениях погрешностей.

Для рассматриваемой задачи физический смысл имеет только частота ω_2. Найденные высшие собственные частоты ω_3 и ω_4 на несколько порядков отличаются от низшей ненулевой частоты ω_2. Указанная особенность связана с заменой абсолютно жестких соединительных звеньев на объекты с конечной жесткостью, что не сказывается на собственных колебаниях системы

Таблица 1 — Параметры четырехмассовой динамической схемы (см. рисунок 1 *б*)
Table 1 — Parameters of the four-mass dynamic scheme (see Figure 1 *b*)

J_1	J_2	J_3	J_4	C_{34}	C_{123}	C_F	C_T	u_{234}
0,05	1,2	0,4	3,0	$2{,}5 \cdot 10^4$	$1{,}0 \cdot 10^{10}$	$1{,}0 \cdot 10^{10}$	$1{,}0 \cdot 10^{10}$	–2,43

Таблица 2 — Собственные частоты ω_k, рад/с, и собственные формы x_{ik} четырехмассовой динамической схемы (см. рисунок 1 *б*)
Table 2 — Natural frequencies ω_k, rad/s, and natural modes x_{ik} of the four-mass dynamic scheme (see Figure 1 *b*)

Муфта F замкнута, тормоз T разомкнут					Муфта F разомкнута, тормоз T замкнут				
ω_1	x_{11}	x_{21}	x_{31}	x_{41}	ω_1	x_{11}	x_{21}	x_{31}	x_{41}
0,002	1,0	1,0	1,0	1,0	0,001	1,0	0	0,292	0,292
ω_2	x_{12}	x_{22}	x_{32}	x_{42}	ω_2	x_{12}	x_{22}	x_{32}	x_{42}
153,248	1,0	1,0	1,0	–0,55	183,387	1,0	0	0,292	–0,096
ω_3	x_{13}	x_{23}	x_{33}	x_{43}	ω_3	x_{13}	x_{23}	x_{33}	x_{43}
360745	1,0	–0,152	0,33	0	86994	1,0	–1,001	–0,429	0
ω_4	x_{14}	x_{24}	x_{34}	x_{44}	ω_4	x_{14}	x_{24}	x_{34}	x_{44}
788369	1,0	0,058	–0,299	0	737628	1,0	0,103	–0,429	0

в исследуемом диапазоне частот. Количество получаемых при рассматриваемом подходе «фиктивных» высших собственных частот равно числу входящих в схему при каждом ее состоянии жестких элементов. Схема на рисунке 1 *а* содержит два таких элемента: жесткий дифференциал D_{123} и жесткую связь, образующуюся при включении муфты F (для первого возможного состояния) или тормоза T (для второго возможного состояния). Поэтому после расчета необходимо «отбрасывать» соответствующее количество найденных высших собственных частот (и отвечающие им собственные формы), как не имеющих реального физического смысла.

Заключение. Трансмиссии мобильных машин представляют собой сложные механические системы, отличающиеся значительным структурным и компонентным разнообразием, а также наличием множества возможных состояний, связанного с переключением на передачах элементов управления. При расчете частот и форм собственных колебаний таких систем целесообразно применять универсальные методы.

Предлагается использовать подход, основанный на сведении рассматриваемой задачи к определению собственных значений и собственных векторов матрицы специального вида. Выполнение предварительного преобразования матрицы к симметричному виду дает возможность применять итерационный численный метод вращений Якоби. Эффективность метода заключается в использовании преобразований подобия с ортогональными матрицами, благодаря чему сохраняется метрика пространства. Наличие указанного свойства позволяет находить с очень высокой точностью все собственные частоты и формы колебаний плохо обусловленных динамических схем, параметры элементов которых отличаются на несколько порядков.

Для упрощения составления уравнений собственных колебаний схемы и автоматизации процесса формирования матрицы жесткости абсолютно жесткие соединительные звенья наделяются конечными жесткостями. Появляющиеся при таких заменах дополнительные высшие собственные частоты рассматриваются как «фиктивные», не имеющие реального физического смысла.

Предложен новый подход к составлению уравнений собственных колебаний систем со множеством возможных состояний. Для этого используются индикаторы состояния устройств с переменной структурой, что позволяет получить универсальные уравнения, описывающие колебания системы при любом ее возможном состоянии.

Эффективность разработанной методики и основанной на ней зарегистрированной компьютерной программы продемонстрирована примером расчета частот и форм собственных колебаний четырехмассовой динамической схемы, содержащей характерные типы устройств.

Список литературы

1. Бидерман, В.Л. Теория механических колебаний: учеб. для вузов / В.Л. Бидерман. — М.: Высш. шк., 1980. — 408 с.
2. Пановко, Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара / Я.Г. Пановко. — Изд. 3-е, доп. и перераб. — Л.: Машиностроение (Ленингр. отд-ние), 1976. — 320 с.
3. Бабаков, И.М. Теория колебаний: учеб. пособие / И.М. Бабаков. — 4-е изд., испр. — М.: Дрофа, 2004. — 591 с.
4. Тимошенко, С.П. Колебания в инженерном деле: пер. с англ. Л.Г. Корнейчука / С.П. Тимошенко, Д.Х. Янг, У. Уивер; под ред. Э.И. Григолюка. — М.: Машиностроение, 1985. — 472 с.
5. Яблонский, А.А. Курс теории колебаний: учеб. пособие / А.А. Яблонский, С.С. Норейко. — 4-е изд., стер. — СПб.: Лань, 2003. — 256 с.
6. Стрелков, С.П. Введение в теорию колебаний: учеб. для вузов / С.П. Стрелков. — 2-е изд., перераб. — М.: Наука, 1964. — 440 с.
7. Обморшев, А.Н. Введение в теорию колебаний: учеб. пособие для втузов / А.Н. Обморшев; под ред. В.В. Петрова. — М.: Наука, 1965. — 276 с.
8. Ильин, М.М. Теория колебаний: учеб. для вузов / М.М. Ильин, К.С. Колесников, Ю.С. Саратов; под. общ. ред. К.С. Колесникова. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. — 272 с.
9. Смирнов, А.Ф. Устойчивость и колебания сооружений / А.Ф. Смирнов. — М.: Трансжелдориздат, 1958. — 571 с.
10. Филин, А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела: сопротивление материалов с элементами теории сплошных сред и строительной механики: в 3-х т. / А.П. Филин. — М.: Наука, 1981. — Т. 3: Динамика и устойчивость деформируемых систем. — 480 с.
11. Цзе, Ф.С. Механические колебания: пер. с англ. Я.А. Лосевса, С.В. Эглита / Ф.С. Цзе, И.Е. Морзе, Р.Т. Хинкл; под ред. И.Ф. Образцова. — М.: Машиностроение, 1966. — 508 с.
12. Тонг, К.Н. Теория механических колебаний: пер. с англ. О.В. Лужина / К.Н. Тонг; под ред. А.П. Синицына. — М.: Машгиз, 1963. — 351 с.
13. Маслов, Г.С. Расчеты колебаний валов: справ. / Г.С. Маслов. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Машиностроение, 1980. — 151 с.
14. Лихачев, Д.С. Особенности динамической нагруженности трансмиссии транспортного средства с комбинированной энергоустановкой / Д.С. Лихачев, И.А. Тараторкин, С.А. Харитонов // Труды НАМИ. — 2016. — № 4(267). — С. 22–31.
15. Альгин, В.Б. Динамика трансмиссии автомобиля и трактора / В.Б. Альгин, В.Я. Павловский, С.Н. Поддубко; под ред. И.С. Цитовича. — Минск: Наука и техника, 1986. — 214 с.
16. Вибрации в технике: справ.: в 6-ти т. / ред. совет: В.Н. Челомей (пред.) [и др.]. — М.: Машиностроение, 1978–1981. — Т. 1: Колебания линейных систем / И.И. Артоболевский [и др.]; под ред. В.В. Болотина. — 1978. — 352 с.
17. Фаддеев, Д.К. Вычислительные методы линейной алгебры / Д.К. Фаддеев, В.Н. Фаддеева. — Изд. 2-е, доп. — М.-Л.: Физматгиз, 1963. — 734 с.
18. Демидович, Б.П. Основы вычислительной математики: учеб. пособие для втузов / Б.П. Демидович, И.А. Марон. — Изд. 3-е, испр. — М.: Наука, 1966. — 664 с.
19. Крылов, В.И. Начала теории вычислительных методов. Линейная алгебра и нелинейные уравнения / В.И. Крылов, В.В. Бобков, П.И. Монастырный. — Минск: Наука и техника, 1985. — 280 с.
20. Уилкинсон, Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений: пер. с англ. В.В. Воеводина, В.Н. Фаддеевой / Дж.Х. Уилкинсон. — М.: Наука, 1970. — 564 с.
21. Воеводин, В.В. Численные методы алгебры: теория и алгорифмы / В.В. Воеводин. — М.: Наука, 1966. — 248 с.
22. Парлетт, Б.Н. Симметричная проблема собственных значений: численные методы: пер. с англ. Х.Д. Икрамова, Ю.А. Кузнецова / Б.Н. Парлетт. — М.: Мир, 1983. — 384 с.
23. Деммель, Дж.У. Вычислительная линейная алгебра: теория и приложения: пер. с англ. Х.Д. Икрамова / Дж.У. Деммель. — М.: Мир, 2001. — 430 с.

24. Вержбицкий, В.М. Вычислительная линейная алгебра: учеб. пособие для вузов / В.М. Вержбицкий. — М.: Высш. шк., 2009. — 351 с.
25. Бахвалов, Н.С. Численные методы: анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения: учеб. пособие для вузов / Н.С. Бахвалов. — М.: Наука, 1975. — 632 с.
26. Калиткин, Н.Н. Численные методы: учеб. пособие для университетов и втузов / Н.Н. Калиткин. — 2-е изд., испр. — СПб.: БХВ-Петербург, 2011. — 586 с.
27. Турчак, Л.И. Основы численных методов: учеб. пособие для вузов / Л.И. Турчак, П.В. Плотников. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Физматлит, 2003. — 304 с.
28. Ильин, В.А. Линейная алгебра: учеб. для вузов / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. — 4-е изд. — М.: Наука: Физматлит, 1999. — 296 с.
29. Квасов, Б.И. Численные методы анализа и линейной алгебры: учеб. пособие / Б.И. Квасов. — Новосибирск: НГУ, 2012. — 262 с.
30. Хорн, Р. Матричный анализ: пер. с англ. Х.Д. Икрамова, А.В. Князева, Е.Е. Тыртышникова / Р. Хорн, Ч. Джонсон; под ред. Х.Д. Икрамова. — М.: Мир, 1989. — 655 с.
31. Бате, К. Численные методы анализа и метод конечных элементов: пер. с англ. А.С. Алексеева [и др.] / К. Бате, Е. Вилсон; под ред. А.Ф. Смирнова. — М.: Стройиздат, 1982. — 448 с.
32. Альгин, В.Б. Динамика, надежность и ресурсное проектирование трансмиссий мобильных машин / В.Б. Альгин. — Минск: Навука і тэхніка, 1995. — 256 с.
33. Альгин, В.Б. Расчет мобильной техники: кинематика, динамика, ресурс / В.Б. Альгин. — Минск: Беларус. навука, 2014. — 271 с.
34. Расчет частот и форм собственных колебаний механических систем произвольной структуры со множеством возможных состояний: комп. программа / В.Б. Альгин, А.М. Гоман, Т.С. Логвинец, В.В. Шпортько // Комп. программа: св-во 1024 Респ. Беларусь; правообладатель государственное научное учреждение «Объединенный институт машиностроения Национальной академии наук Беларуси». — Заявл. 07.02.18; опубл. 22.02.18 // Реестр зарегистрир. компьютерных программ / НЦИС. — 2018.

ALGIN Vladimir B., D. Sc. in Eng., Prof.
Deputy Director General for Research[1]
E-mail: vladimir.algin@gmail.com

GOMAN Arkadiy M., Ph. D. in Eng., Assoc. Prof.
Head of the Department of Dynamic Analysis and Vibration Diagnostics of Machines[1]
E-mail: ark.goman@gmail.com

SHPORTKO Vladimir V.
Junior Researcher of the Department of Dynamic Analysis and Vibration Diagnostics of Machines[1]
E-mail: llii7pot@yandex.ru

LOGVINETS Tatyana S.
Junior Researcher of the Department of Dynamic Analysis and Vibration Diagnostics of Machines[1]
E-mail: tanka-tane4ka@mail.ru

[1]Joint Institute of Mechanical Engineering of the NAS of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

Received 02 August 2018.

CALCULATION METHODOLOGY OF THE NATURAL FREQUENCIES AND MODES OF MECHANICAL SYSTEMS OF AN ARBITRARY STRUCTURE WITH A PLURALITY OF POSSIBLE STATES

Methodical approaches to determination of the natural frequencies and modes of transmissions of mobile machines and similar to them badly conditioned systems with a wide natural frequencies spectrum and a plurality of states are considered. The problem is solved in a general formulation taking into account the characteristic features of the transmission in its schematization. The calculation is reduced to the computation of eigenvalues and eigenvectors of a matrix of a special form. An approach based on the preliminary matrix symmetrization and the application of the iterative numerical method of Jacobi rotations is used. This allows to evaluate all natural frequencies and modes of badly conditioned systems with a very high precision. The process of the system stiffness matrix forming is automated by means of replacing the absolutely rigid links (if any) with links with finite stiffness. To form the equations of natural oscillations of systems with a plurality of possible states, the use of the state indicators of devices with variable structure is suggested. That approach allows to obtain universal equations describing the system motion for its any possible state. Based on the developed methodology, a computer program was created and registered, an example with its application is given.

Keywords: *transmission, natural frequencies and modes, methodology, mechanical system with a plurality of possible states, state indicator*

References

1. Biderman V.L. *Teoriya mekhanicheskikh kolebaniy: ucheb. dlya vuzov* [Theory of mechanical vibrations: guide for universities]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1980. 408 p.
2. Panovko Ya.G. *Osnovy prikladnoy teorii kolebaniy i udara* [Fundamentals of applied theory of vibrations and impact]. 3rd ed. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1976. 320 p.
3. Babakov I.M. *Teoriya kolebaniy: ucheb. posobie* [Theory of vibrations: guide]. 4th ed. Moscow, Drofa Publ., 2004. 591 p.
4. Timoshenko S.P., Young D.H., Weaver W. *Vibration problems in engineering*. 4th ed. New York, Wiley, 1974. 521 p.
5. Yablonskiy A.A., Noreyko S.S. *Kurs teorii kolebaniy: ucheb. posobie* [Course of the vibrations theory: guide]. 4th ed. Saint Petersburg, Lan Publ., 2003. 256 p.
6. Strelkov S.P. *Vvedenie v teoriyu kolebaniy: ucheb. dlya vuzov* [Introduction to the vibrations theory: guide for universities]. 2nd ed. Moscow, Nauka Publ., 1964. 440 p.
7. Obmorshev A.N. *Vvedenie v teoriyu kolebaniy: ucheb. posobie dlya vtuzov* [Introduction to the vibrations theory: guide for universities]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 276 p.
8. Ilin M.M., Kolesnikov K.S., Saratov Yu.S. *Teoriya kolebaniy: ucheb. dlya vuzov* [Theory of vibrations: guide for universities]. Moscow, Bauman Moscow State Technical University Publ., 2001. 272 p.
9. Smirnov A.F. *Ustoychivost i kolebaniya sooruzheniy* [Stability and vibrations of structures]. Moscow, Transzheldorizdat Publ., 1958. 571 p.
10. Filin A.P. *Prikladnaya mekhanika tverdogo deformiruemogo tela: soprotivlenie materialov s elementami teorii sploshnykh sred i stroitelnoy mekhaniki. Tom 3: Dinamika i ustoychivost deformiruemykh sistem* [Applied mechanics of a solid deformable body: strength of materials with elements of the theory of continua and construction mechanics. Vol. 3: Dynamics and stability of deformable systems]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 480 p.
11. Tse F.S., Morse I.E., Hinkle R.T. *Mechanical vibrations*. Boston, Allyn and Bacon, 1963. 523 p.
12. Tong K.N. *Theory of mechanical vibration*. New York, Wiley, 1960. 348 p.
13. Maslov G.S. *Raschety kolebaniy valov: sprav.* [Calculations of shafts oscillations: reference book]. 2nd ed. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1980. 151 p.
14. Likhachev D.S., Taratorkin I.A., Kharitonov S.A. Osobennosti dinamicheskoy nagruzhennosti transmissii transportnogo sredstva s kombinirovannoy energoustanovkoy [Features of the dynamic loading of a vehicle transmission equipped with a combined power unit]. *Trudy NAMI* [Proc. NAMI], 2016, no. 4(267), pp. 22–31.
15. Algin V.B., Pavlovskiy V.Ya., Poddubko S.N. *Dinamika transmissii avtomobilya i traktora* [Car and tractor transmission dynamics]. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1986. 214 p.
16. Artobolevskiy I.I., et al. *Vibratsii v tekhnike: sprav. v 6 tomakh. Tom 1: Kolebaniya lineynykh sistem* [Vibrations in engineering: reference book in 6 volumes. Vol. 1: Vibrations of linear systems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1978. 352 p.
17. Faddeev D.K., Faddeeva V.N. *Vychislitelnye metody lineynoy algebry* [Computational methods of linear algebra]. 2nd ed. Moscow-Leningrad, Fizmatgiz Publ., 1963. 734 p.
18. Demidovich B.P., Maron I.A. *Osnovy vychislitelnoy matematiki: ucheb. posobie dlya vtuzov* [Fundamentals of computational mathematics: guide for universities]. 3rd ed. Moscow, Nauka Publ., 1966. 664 p.
19. Krylov V.I., Bobkov V.V., Monastyrnyy P.I. *Nachala teorii vychislitelnykh metodov. Lineynaya algebra i nelineynye uravneniya* [Beginnings of the computational methods theory. Linear algebra and nonlinear equations]. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1985. 280 p.
20. Wilkinson J.H. *The algebraic eigenvalue problem*. Oxford, Clarendon Press, 1965. 662 p.
21. Voevodin V.V. *Chislennye metody algebry: teoriya i algorifmy* [Numerical methods of algebra: theory and algorithms]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 248 p.
22. Parlett B.N. *The symmetric eigenvalue problem*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1980.
23. Demmel J.W. *Applied numerical linear algebra*. Philadelphia, SIAM, 1997. 416 p.
24. Verzhbitskiy V.M. *Vychislitelnaya lineynaya algebra: ucheb. posobie dlya vuzov* [Computational linear algebra: guide for universities]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2009. 351 p.
25. Bakhvalov N.S. *Chislennye metody: analiz, algebra, obyknovennye differentsialnye uravneniya: ucheb. posobie dlya vuzov* [Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations: guide for universities]. Moscow, Nauka Publ., 1975. 632 p.
26. Kalitkin N.N. *Chislennye metody: ucheb. posobie dlya universitetov i vtuzov* [Numerical Methods: guide for universities]. 2nd ed. Saint Petersburg, BHV-Peterburg Publ., 2011. 586 p.
27. Turchak L.I., Plotnikov P.V. *Osnovy chislennykh metodov: ucheb. posobie dlya vuzov* [Fundamentals of numerical methods: guide for universities]. 2nd ed. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003. 304 p.
28. Ilin V.A., Poznyak E.G. *Lineynaya algebra: ucheb. dlya vuzov* [Linear algebra: guide for universities]. Moscow, Nauka Publ, Fizmatlit Publ., 1999. 296 p.
29. Kvasov B.I. *Chislennye metody analiza i lineynoy algebry: ucheb. posobie* [Numerical methods of analysis and linear algebra: guide]. Novosibirsk, Novosibirsk State University Publ., 2012. 262 p.
30. Horn R.A., Johnson C.R. *Matrix analysis*. Cambridge, Cambridge University Press, 1985.
31. Bathe K.-J., Wilson E.L. *Numerical methods in finite method analysis*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1976. 528 p.
32. Algin V.B. *Dinamika, nadezhnost i resursnoe proektirovanie transmissiy mobilnykh mashin* [Dynamics, reliability and lifetime design of transmissions of mobile machines]. Minsk, Navuka i tekhnika Publ., 1995. 256 p.
33. Algin V.B. *Raschet mobilnoy tekhniki: kinematika, dinamika, resurs* [Calculation of mobile technics: kinematics, dynamics, lifetime]. Minsk, Belaruskaya navuka Publ., 2014. 271 p.
34. Algin V.B., Goman A.M, Logvinets T.S., Shportko V.V. *Raschet chastot i form sobstvennykh kolebaniy mekhanicheskikh sistem proizvolnoy struktury so mnozhestvom vozmozhnykh sostoyaniy. Svidetelstvo ob ofitsialnoy registratsii programmy na EVM* [Calculation of the natural frequencies and modes of mechanical systems of an arbitrary structure with a plurality of possible states. The Certificate on Official Registration of the Computer Program], 2018, no. 1024.