



МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.3

Э.И. СТАРОВОЙТОВ, д-р физ.-мат. наук, проф.

заведующий кафедрой «Строительная механика»¹

E-mail: edstar0@yandex.by

Ю.В. ЗАХАРЧУК, канд. физ.-мат. наук

старший преподаватель кафедры «Строительные технологии и конструкции»¹

E-mail: zakharchuk.julia2@mail.ru

¹Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Республика Беларусь

Поступила в редакцию 05.06.2019.

НЕЛИНЕЙНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Приводится постановка краевой задачи о деформировании круглой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем, находящейся под действием осесимметричной нагрузки. Для описания кинематики пакета приняты гипотезы ломаной линии. В тонких несущих слоях справедливы гипотезы Кирхгофа. В относительно толстом сжимаемом по толщине легком заполнителе выполняется гипотеза Тимошенко с линейной аппроксимацией радиальных перемещений и прогиба по толщине слоя. Работа сдвиговых напряжений и напряжений обжатия в заполнителе предполагается малой и не учитывается. Физические уравнения состояния в слоях пластины описываются соотношениями нелинейной теории упругости. Уравнения равновесия получены вариационным методом Лагранжа. Сформулированы граничные условия на контуре пластины. Решение краевой задачи сведено к нахождению четырех искомых функций — прогиба нижнего слоя, сдвига, радиального перемещения и функции обжатия в заполнителе. Эти функции удовлетворяют неоднородной системе обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. Для ее решения применен метод последовательных линейных приближений, основанный на методе упругих решений Ильюшина. Получено общее итерационное аналитическое решение поставленной краевой задачи в функциях Бесселя. Проведен его параметрический анализ при равномерно распределенной нагрузке и жесткой заделке контура пластины. Численно исследовано влияние нелинейности материалов слоев и сжимаемости заполнителя на напряженно-деформированное состояние пластины. Приведены соответствующие графики распределения деформаций и областей нелинейности по радиусу пластины.

Ключевые слова: нелинейная упругость, круглая трехслойная пластина, сжимаемый заполнитель, деформации

Введение. Использование трехслойных конструкций в технике потребовало создания адекватных математических моделей расчета их напряженно-деформированного состояния (НДС) и разработки методов решения соответствующих краевых задач.

Теория деформирования круговых трехслойных пластин с несжимаемыми заполнителями при внешних различного рода силовых воздействиях в настоящее время разработана достаточно полно.

В монографии [1] сформулированы различные начально-краевые задачи динамики неоднородных, в том числе трехслойных, оболочек при нестационарных нагрузках, разработанных киевскими учеными Института механики им. С.П. Тимошенко. В статьях [2–7] приведены решения конкретных задач о свободных и вынужденных колебаниях трехслойных стержней, пластин и оболочек в условиях флаттера, при ударных, резонансных и локальных нагрузках. Работа [8]

посвящена изучению несущей способности кольцевой волокнистой трехслойной пластины. Математические модели квазистатического деформирования физически нелинейных трехслойных элементов конструкций, постановки краевых задач, методы их решения приведены в монографии [9]. Циклическое квазистатическое деформирование упругопластических слоистых оболочек и пластин исследовалось в работах [10–12]. В публикациях [13–17] проведено исследование деформации изгиба сэндвич-пластин в зависимости от вида ячеистого заполнителя, наличия упругих опор либо упругого основания, функционально-градиентных свойств материалов. Расчеты НДС трехслойных упругопластических стержней и круговых пластин с несжимаемым заполнителем при термосиловом деформировании нагрузками различного вида содержатся в статьях [18–20]. Механико-математическая модель деформирования упругих трехслойных круговых пластин со сжимаемым заполнителем предложена в публикациях [21, 22].

В предлагаемой работе приводится постановка краевой задачи и ее решение для круговой физически нелинейной трехслойной пластины с учетом сжимаемости заполнителя.

1. Постановка краевой задачи. Рассматривается круговая трехслойная пластина с легким сжимаемым заполнителем (рисунок 1), материалы слоев которой деформируются физически нелинейно. Цилиндрическая система координат r, φ, z связана со срединной плоскостью заполнителя. Кинематические гипотезы: в тонких несущих слоях с толщинами h_1, h_2 справедливы гипотезы Кирхгофа, в достаточно толстом заполнителе ($h_3 = 2c$) нормаль остается прямолинейной, но поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(r)$. На внешний слой пластины перпендикулярно верхнему слою действует осесимметричная распределенная нагрузка $q(r)$. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев и обжатию заполнителя ($\psi = 0, v = 0$ при $r = r_0$). Искомые функции: $w(r)$ — прогиб нижнего слоя (2); $u(r)$ — продольное перемещение срединной плоскости заполнителя; $v(r), \psi(r)$ — функция обжатия и сдвиг в заполнителе.

В этом случае принимается, что функция обжатия изменяется линейно по толщине заполнителя. Радиальные и поперечные перемещения в

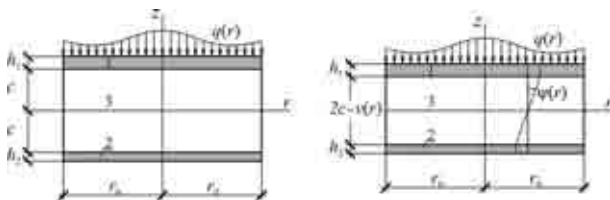


Рисунок 1 — Расчетная схема трехслойной пластины
Figure 1 — Design model of three-layer plate

слоях $u^{(k)}(r, z)$ и $w^{(k)}(r, z)$ ($k = 1, 2, 3$ — номер слоя) выражаются через искомые функции следующими соотношениями:

- в несущих слоях 1, 2:

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u + c\psi - z(w_{,r} + v_{,r}), \\ w^{(1)}(r, z) &= w(r) + v(r) \quad (c \leq z \leq c + h); \\ u_r^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,r}, \\ w^{(2)}(r, z) &= w(r) \quad (-c - h \leq z \leq -c); \end{aligned} \quad (1)$$

- в заполнителе 3:

$$\begin{aligned} u_r^{(3)} &= u + z\psi - z\left[w_{,r} + \frac{v_{,r}}{2c}(z + c)\right], \\ w^{(3)}(r, z) &= w(r) + \frac{v(r)}{2c}(z + c) \quad (-c \leq z \leq c), \end{aligned}$$

где z — координата рассматриваемого волокна (запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате).

Введем интенсивности обобщенных внутренних усилий в пластине с помощью компонентов тензора напряжений $\sigma_\alpha^{(k)}(\alpha = r, \varphi)$:

$$T_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz; \quad M_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz;$$

$$S_\alpha^{(3)} = \int_{-c}^c \sigma_\alpha^{(3)} z^2 dz; \quad H_\alpha = M_\alpha^{(3)} + c(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}); \quad (2)$$

$$D_\alpha = M_\alpha^{(1)} + \frac{1}{2}M_\alpha^{(3)} + \frac{1}{2c}S_\alpha^{(3)},$$

где интегралы берутся по толщине k -го слоя.

Уравнения равновесия рассматриваемой трехслойной пластины получим, используя вариационный принцип Лагранжа [9]:

$$\delta A = \delta W, \quad (3)$$

где $\delta A = \delta A_1 + \delta A_2$ — вариация работы внешних и контурных сил; δW — вариация работы внутренних напряжений.

Считаем, что к внешнему слою пластины приложена осесимметричная распределенная нагрузка $q(r)$, к торцам пластины — усилия и моменты $T_r^0, H_r^0, M_r^0, D_r^0$. Вариация работы внешней поверхностной нагрузки:

$$\delta A_1 = \iint_S q \delta w_1 r dr d\varphi = \iint_S q (\delta w + \delta v) r dr d\varphi. \quad (4)$$

Вариация работы контурных усилий:

$$\delta A_2 = \int_0^{2\pi} (T_r^0 \delta u + H_r^0 \delta \psi + M_r^0 \delta w_{,r} + D_r^0 \delta v_{,r}) r dr d\varphi. \quad (5)$$

Виртуальная работа сил упругости:

$$\delta W = \iint_S \left[\sum_{k=1}^3 \int_{h_k} (\sigma_r^{(k)} \delta \epsilon_r^{(k)} + \sigma_\varphi^{(k)} \delta \epsilon_\varphi^{(k)}) dz \right] r dr d\varphi, \quad (6)$$

где $\epsilon_\alpha^{(k)}(\alpha = r, \varphi)$ — компоненты тензора деформаций в k -м слое; $\delta \epsilon_\alpha^{(k)}$ — вариации деформаций;

в легком заполнителе пренебрегается работа тангенциальных $\sigma_{rz}^{(3)}$ и нормальных $\sigma_z^{(3)}$ напряжений, двойной интеграл берется по всей срединной поверхности заполнителя S .

Компоненты тензора деформаций в слоях следуют из перемещений (1) с помощью соотношений Коши [9]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r^{(1)} &= u_{,r} + c\psi_{,r} - z(w_{,rr} + v_{,rr}); \\ \varepsilon_\varphi^{(1)} &= \frac{1}{r}(u + c\psi - z(w_{,r} + v_{,r})); \\ \varepsilon_{rz}^{(1)} &= 0; \quad (c \leq z \leq c + h_1); \\ \varepsilon_r^{(2)} &= u_{,r} - c\psi_{,r} - zw_{,rr}; \\ \varepsilon_\varphi^{(2)} &= \frac{1}{r}(u - c\psi - zw_{,r}); \quad \varepsilon_{rz}^{(2)} = 0 \\ &\quad (-c - h_2 \leq z \leq -c); \\ \varepsilon_r^{(3)} &= u_{,r} + z\psi_{,r} - z\left[w_{,rr} + \frac{v_{,rr}}{2c}(z + c)\right]; \\ \varepsilon_\varphi^{(3)} &= \frac{1}{r}\left\{u + z\psi - z\left[w_{,r} + \frac{v_{,r}}{2c}(z + c)\right]\right\}; \\ \varepsilon_{rz}^{(3)} &= \frac{1}{2}\left(\psi - \frac{z}{2c}v_{,r}\right); \quad \varepsilon_z^{(3)} = \frac{v}{2c} \quad (-c \leq z \leq c).\end{aligned}\quad (7)$$

Подставив выражения (4)–(6) в уравнение (3) и используя вариации деформаций (7), получим систему дифференциальных уравнений равновесия в обобщенных усилиях:

$$\begin{aligned}T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_\varphi) &= 0; \quad H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) = 0; \\ M_{r,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) &= -q; \quad D_{r,rr} + \frac{1}{r}(2D_{r,r} - D_{\varphi,r}) = -q.\end{aligned}\quad (8)$$

На контуре пластины $r = r_0$ должны выполняться силовые условия:

$$\begin{aligned}T_r &= T_r^0; \quad H_r = H_r^0; \quad M_r = M_r^0; \quad M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) = 0; \\ D_r &= D_r^0; \quad D_{r,r} + \frac{1}{r}(D_r - D_\varphi) = 0.\end{aligned}\quad (9)$$

Для связи напряжений и деформаций в слоях пластины используются нелинейные физические уравнения состояния [9]:

$$\begin{aligned}s_\alpha^{(k)} &= 2G_k(1 - \omega_k(\varepsilon_u^{(k)}))\varepsilon_\alpha^{(k)}; \\ \sigma^{(k)} &= 3K_k\varepsilon^{(k)} \quad (k = 1, 2, 3; \quad \alpha = r, \varphi); \\ s_z^{(3)} &= 2G_3(1 - \omega_3(\varepsilon_u^{(3)}))\varepsilon_z^{(3)}; \\ s_{rz}^{(3)} &= 2G_3(1 - \omega_3(\varepsilon_u^{(3)}))\varepsilon_{rz}^{(3)},\end{aligned}\quad (10)$$

где $s_\alpha^{(k)}$, $\varepsilon_\alpha^{(k)}$ — девиаторные и $\sigma^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ — шаровые части тензоров напряжений и деформаций; $s_z^{(3)}$, $s_{rz}^{(3)}$, $\varepsilon_z^{(3)}$, $\varepsilon_{rz}^{(3)}$ — девиаторы тензоров в заполнителе; G_k , K_k — модули сдвиговой и объемной деформации; $\omega_k(\varepsilon_u^{(k)})$ — функции пластичности Ильюшина материалов несущих слоев ($k = 1, 2$), которые при $\varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_y^{(k)}$ равны нулю; $\varepsilon_y^{(k)}$ — деформационные

пределы текучести материалов несущих слоев; $\omega_3(\varepsilon_u^{(3)})$ — универсальная функция, описывающая физическую нелинейность заполнителя, полагается равной нулю при $\varepsilon_u^{(3)} \leq \varepsilon_s^{(3)}$; $\varepsilon_s^{(3)}$ — деформационный предел физической нелинейности материала заполнителя; $\varepsilon_u^{(k)}$ — интенсивность деформаций:

$$\varepsilon_u^{(k)} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi})^2 + (\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{rr})^2 + 6(\varepsilon_{r\varphi}^2 + \varepsilon_{\varphi z}^2 + \varepsilon_{rz}^2)}.$$

Разложив компоненты тензора напряжений в слоях на линейную и нелинейную составляющие, получим:

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha^{(k)} &= \sigma_{\alpha e}^{(k)} - \sigma_{\alpha\omega}^{(k)} \quad (\alpha = r, \varphi; \quad k = 1, 2, 3); \\ \sigma_z^{(3)} &= \sigma_{ze}^{(3)} - \sigma_{z\omega}^{(3)}; \quad \sigma_{rz}^{(3)} = \sigma_{rze}^{(3)} - \sigma_{rz\omega}^{(3)},\end{aligned}\quad (11)$$

где упругие (индекс «e») и неупругие (индекс «ω») составляющие выражены через девиаторную и шаровую части тензора деформаций:

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha e}^{(k)} &= 2G_k\varepsilon_\alpha^{(k)} + K_k\theta^{(k)}; \quad \sigma_{\alpha\omega}^{(k)} = 2G_k\omega_k\varepsilon_\alpha^{(k)}; \\ \sigma_{ze}^{(3)} &= 2G_3\varepsilon_z^{(3)} + K_3\theta^{(3)}; \quad \sigma_{z\omega}^{(3)} = 2G_3\omega_3\varepsilon_z^{(3)}; \\ \sigma_{rze}^{(3)} &= 2G_3\varepsilon_{rz}^{(3)}; \quad \sigma_{rz\omega}^{(3)} = 2G_3\omega_3\varepsilon_{rz}^{(3)}.\end{aligned}$$

Внутренние усилия в слоях пластины также раскладываются на линейную (индекс «e») и нелинейную (индекс «ω») части:

$$\begin{aligned}T_\alpha^{(k)} &= T_{\alpha e}^{(k)} - T_{\alpha\omega}^{(k)}; \quad M_\alpha^{(k)} = M_{\alpha e}^{(k)} - M_{\alpha\omega}^{(k)}; \\ S_\alpha^{(3)} &= S_{\alpha e}^{(3)} - S_{\alpha\omega}^{(3)} \quad (\alpha = r, \varphi),\end{aligned}\quad (12)$$

где упругие и нелинейные составляющие вычисляются по формулам (2), в которых напряжения $\sigma_\alpha^{(k)}$ нужно заменить соответственно на $\sigma_{\alpha e}^{(k)}$ и $\sigma_{\alpha\omega}^{(k)}$ из соотношений (11).

Используя (12), обобщенные внутренние усилия представим в виде:

$$\begin{aligned}T_\alpha &= T_{\alpha e} - T_{\alpha\omega} = \sum_{k=1}^3 T_{\alpha e}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 T_{\alpha\omega}^{(k)}; \\ M_\alpha &= M_{\alpha e} - M_{\alpha\omega} = \sum_{k=1}^3 M_{\alpha e}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 M_{\alpha\omega}^{(k)}; \\ H_\alpha &= H_{\alpha e} - H_{\alpha\omega}; \quad H_{\alpha e} = M_{\alpha e}^{(3)} + c(T_{\alpha e}^{(1)} - T_{\alpha e}^{(2)}); \\ H_{\alpha\omega} &= M_{\alpha\omega}^{(3)} + c(T_{\alpha\omega}^{(1)} - T_{\alpha\omega}^{(2)}); \\ D_\alpha &= D_{\alpha e} - D_{\alpha\omega}; \quad D_{\alpha e} = M_{\alpha e}^{(1)} + \frac{1}{2}M_{\alpha e}^{(3)} + \frac{1}{2c}S_{\alpha e}^{(3)}; \\ D_{\alpha\omega} &= M_{\alpha\omega}^{(1)} + \frac{1}{2}M_{\alpha\omega}^{(3)} + \frac{1}{2c}S_{\alpha\omega}^{(3)}.\end{aligned}\quad (13)$$

Подставив обобщенные усилия (13) в систему уравнений (8), приведем ее к виду

$$\begin{aligned}T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_\varphi) &= p_\omega; \quad H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) = h_\omega; \\ M_{r,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) &= -q + q_\omega; \\ D_{r,rr} + \frac{1}{r}(2D_{r,r} - D_{\varphi,r}) &= -q + g_\omega.\end{aligned}\quad (14)$$

Аналогично преобразуются граничные условия (9):

$$T_r = T_r^0 + T_\omega; \quad H_r = H_r^0 + H_\omega; \quad M_r = M_r^0 + M_\omega; \\ M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\phi) = M_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(M_{r\omega} - M_{\phi\omega}); \quad (15)$$

$$D_r = D_r^0 + D_{r\omega}; \quad D_{r,r} + \frac{1}{r}(D_r - D_\phi) = D_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(D_{r\omega} - D_{\phi\omega}),$$

здесь нижний индекс «e» для простоты опущен.

Нелинейные добавки, сосредоточенные в правой части уравнений (14), будут равны:

$$p_\omega = T_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(T_{r\omega} - T_{\phi\omega}); \quad h_\omega = H_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(H_{r\omega} - H_{\phi\omega}); \\ q_\omega = M_{r\omega,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r\omega,r} - M_{\phi\omega,r}); \quad (16) \\ g_\omega = D_{r\omega,rr} + \frac{1}{r}(2D_{r\omega,r} - D_{\phi\omega,r})$$

с учетом соотношений (11)–(13).

2. Решение краевой задачи. Линейные (упругие) составляющие обобщенных внутренних усилий можно выразить через искомые функции, используя соотношения (2) и закон Гука, следующий из (10) при $\omega_k = 0$. В результате система уравнений (14) приводится к виду:

$$L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r} - a_4 v_{,r}) + K_3^- v_{,r} = p_\omega; \\ L_2(a_2 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r} - a_7 v_{,r}) = h_\omega; \\ L_3(a_3 u + a_6 \psi - a_8 w_{,r} - a_9 v_{,r}) = -q + q_\omega; \quad (17)$$

$$L_3(a_4 u + a_7 \psi - a_9 w_{,r} - a_{10} v_{,r}) + \frac{c}{6} K_3^- \left(v_{,rr} + \frac{v_{,r}}{r} \right) = -q + g_\omega,$$

где коэффициенты a_i и линейные дифференциальные операторы:

$$a_1 = \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+; \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+); \\ a_3 = h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ - h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^+; \\ a_4 = h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ + \frac{c^2}{3} K_3^+; \quad a_5 = c^2 (h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+; \\ a_6 = c \left[h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ + h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right]; \\ a_7 = c \left[h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ + \frac{c^2}{3} K_3^+ \right]; \\ a_8 = h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) K_1^+ + h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+; \\ a_9 = h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) K_1^+ + \frac{c^3}{3} K_3^+; \\ a_{10} = h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) K_1^+ + \frac{4}{15} c^3 K_3^+; \\ L_2(g) = \frac{1}{r}((rg)_{,r})_{,r}; \quad L_3(g) = \frac{1}{r}(rL_2(g))_{,r}; \\ K_k^+ = K_k + \frac{4}{3} G_k; \quad K_k^- = K_k - \frac{2}{3} G_k.$$

Краевая задача замыкается добавлением к системе (17) силовых (15) или кинематических граничных условий, например, при жесткой заделке контура пластины $r = r_0$ должны выполняться требования

$$u^{(n)} = \psi^{(n)} = w^{(n)} = v^{(n)} = w_{,r}^{(n)} = v_{,r}^{(n)} = 0. \quad (18)$$

Для решения системы нелинейных дифференциальных уравнений (17) применен метод упругих решений Ильюшина, позволяющий переписать ее в итерационном виде:

$$L_2(a_1 u^{(n)} + a_2 \psi^{(n)} - a_3 w^{(n)}_{,r} - a_4 v^{(n)}_{,r}) + K_3^- v^{(n)}_{,r} = p_\omega^{(n-1)}; \\ L_2(a_2 u^{(n)} + a_5 \psi^{(n)} - a_6 w^{(n)}_{,r} - a_7 v^{(n)}_{,r}) = h_\omega^{(n-1)}; \\ L_3(a_3 u^{(n)} + a_6 \psi^{(n)} - a_8 w^{(n)}_{,r} - a_9 v^{(n)}_{,r}) = -q + q_\omega^{(n-1)}; \\ L_3(a_4 u^{(n)} + a_7 \psi^{(n)} - a_9 w^{(n)}_{,r} - a_{10} v^{(n)}_{,r}) + \\ + \frac{c}{6} K_3^- \left(v^{(n)}_{,rr} + \frac{v^{(n)}_{,r}}{r} \right) = -q + g_\omega^{(n-1)}, \quad (19)$$

где n — номер приближения.

Нелинейные добавки в (19) вычисляются по результатам предыдущего приближения по формулам типа (16):

$$p_\omega^{(n-1)} = T_{r\omega}^{(n-1)}_{,r} + \frac{1}{r}(T_{r\omega}^{(n-1)} - T_{\phi\omega}^{(n-1)}); \\ h_\omega^{(n-1)} = H_{r\omega}^{(n-1)}_{,r} + \frac{1}{r}(H_{r\omega}^{(n-1)} - H_{\phi\omega}^{(n-1)}); \\ q_\omega^{(n-1)} = M_{r\omega}^{(n-1)}_{,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r\omega}^{(n-1)}_{,r} - M_{\phi\omega}^{(n-1)}_{,r}); \\ g_\omega^{(n-1)} = D_{r\omega}^{(n-1)}_{,rr} + \frac{1}{r}(2D_{r\omega}^{(n-1)}_{,r} - D_{\phi\omega}^{(n-1)}_{,r}); \\ T_{\alpha\omega}^{(n-1)} = \sum_{k=1}^3 2G_k \int_{h_k} \omega_k(\epsilon_u^{(k,n-1)}) \epsilon_\alpha^{(k,n-1)} dz; \\ M_{\alpha\omega}^{(n-1)} = \sum_{k=1}^3 2G_k \int_{h_k} \omega_k(\epsilon_u^{(k,n-1)}) \epsilon_\alpha^{(k,n-1)} z dz; \\ S_{\alpha\omega}^{(3,n-1)} = 2G_3 \int_{-c}^c \omega_3(\epsilon_u^{(3,n-1)}) \epsilon_\alpha^{(3,n-1)} z^2 dz; \\ H_{\alpha\omega}^{(n-1)} = M_{\alpha\omega}^{(3,n-1)} + c(T_{\alpha\omega}^{(1,n-1)} - T_{\alpha\omega}^{(2,n-1)}); \\ D_{\alpha\omega}^{(n-1)} = M_{\alpha\omega}^{(1,n-1)} + \frac{1}{2} M_{\alpha\omega}^{(3,n-1)} + \frac{1}{2c} S_{\alpha\omega}^{(3,n-1)} \quad (\alpha = r, \psi).$$

Решение итерационной системы дифференциальных уравнений (19):

$$\psi^{(n)} = -\frac{1}{a_6} L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) + \frac{C_1^{(n)} r}{4a_6} (2 \ln r - 1) - \\ - \frac{1}{a_6} (a_3 u^{(n)} - a_8 w^{(n)}_{,r} - a_9 v^{(n)}_{,r}) + C_3^{(n)} \frac{r}{2} + C_4^{(n)} \frac{1}{r}; \\ u^{(n)} = b_1 v^{(n)}_{,r} + b_2 L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) + \\ + b_3 L_3^{-1}(q - g_\omega^{(n-1)}) - b_2 C_1^{(n)} \frac{r}{4} (2 \ln r - 1) - \\ - b_3 C_2^{(n)} \frac{r}{4} (2 \ln r - 1) + b_4 L_2^{-1}(h_\omega^{(n-1)}) + \\ + b_5 L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) + C_5^{(n)} \frac{r}{2} + C_6^{(n)} \frac{1}{r};$$

$$\begin{aligned}
v^{(n)} = & -\frac{C_7^{(n)}}{\beta} J_0(\beta r) - \frac{C_8^{(n)}}{\beta} Y_0(\beta r) + \\
& + \frac{\pi}{2} \left(\int Y_1(\beta r) \int J_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r dr dr - \right. \\
& \left. - \int J_1(\beta r) \int Y_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r dr dr \right) + C_9^{(n)}; \\
w^{(n)} = & b_6 \int u^{(n)} dr - \frac{a_6 a_7 - a_5 a_8}{a_6^2 - a_5 a_8} v^{(n)} - \\
& - \frac{a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} \int L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) dr - \\
& - \frac{a_6}{(a_6^2 - a_5 a_8)} \int L_2^{-1}(h_\omega^{(n-1)}) dr + \frac{C_1^{(n)} a_5}{(a_6^2 - a_5 a_8)} \frac{r^2}{4} (\ln r - 1) + \\
& + C_{10}^{(n)} \frac{r^2}{4} + C_{11}^{(n)} \ln r + C_{12}^{(n)}, \quad (20)
\end{aligned}$$

где $J_n(\beta r)$, $Y_n(\beta r)$ — функции Бесселя первого и второго рода n -го порядка;

$$q_1^{(n-1)} = p_1 \frac{1}{r} \int (q - q_\omega^{(n-1)}) r dr + p_2 \frac{1}{r} \int (q - g_\omega^{(n-1)}) r dr,$$

где p_1 , p_2 — параметры, выражающиеся через коэффициенты a_i ; интегралы — определенные с пределами от 0 до r .

Для сплошных пластин из условия ограниченности решения при $r = 0$ следует:

$$C_1^{(n)} = C_2^{(n)} = C_4^{(n)} = C_6^{(n)} = C_8^{(n)} = C_{11}^{(n)} = 0. \quad (21)$$

При заделке контура из граничных условий (18) получим константы интегрирования:

$$\begin{aligned}
C_3^{(n)} &= \frac{2}{a_6 r_0} L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0}; \\
C_5^{(n)} &= -\frac{2b_2}{r_0} L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0} - \frac{2b_3}{r_0} L_3^{-1}(q - g_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0} - \\
& - \frac{2b_4}{r_0} L_2^{-1}(h_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0} - \frac{2b_5}{r_0} L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0}; \\
C_7^{(n)} &= -\frac{\pi}{2J_1(\beta r_0)} \left(Y_1(\beta r_0) \int J_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r dr \Big|_{r=r_0} - \right. \\
& \left. - J_1(\beta r_0) \int Y_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r dr \Big|_{r=r_0} \right); \\
C_9^{(n)} &= \frac{C_7^{(n)}}{\beta} J_0(\beta r_0) - \frac{\pi}{2} \left(\int Y_1(\beta r) \int J_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r dr dr \Big|_{r=r_0} - \right. \\
& \left. - \int J_1(\beta r) \int Y_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r dr dr \Big|_{r=r_0} \right); \quad (22) \\
C_{10}^{(n)} &= \frac{2a_5}{(a_6^2 - a_5 a_8) r_0} L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0} + \\
& + \frac{2a_6}{(a_6^2 - a_5 a_8) r_0^2} L_2^{-1}(h_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0}; \\
C_{12}^{(n)} &= \left(\frac{a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} - b_2 b_6 \right) \int L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) dr \Big|_{r=r_0} + \\
& + \left(\frac{a_6}{(a_6^2 - a_5 a_8) r_0} - b_4 b_6 \right) \int L_2^{-1}(h_\omega^{(n-1)}) dr \Big|_{r=r_0} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - b_5 b_6 \int L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) dr \Big|_{r=r_0} - b_3 b_6 \int L_3^{-1}(q - g_\omega^{(n-1)}) dr \Big|_{r=r_0} - \\
& - b_6 C_5^{(n)} \frac{r_0^2}{4} - C_{10}^{(n)} \frac{r_0^2}{4}.
\end{aligned}$$

3. Численные результаты. Функции нелинейности принимаются в виде [23]:

$$\omega_k(\varepsilon_u) = \begin{cases} 0, & \varepsilon_u \leq \varepsilon_y, \\ A_k (1 - \varepsilon_y^{(k)} / \varepsilon_u)^{\alpha_k}, & \varepsilon_u > \varepsilon_y, \end{cases} \quad (23)$$

где A_k , α_k — константы нелинейности материалов.

В качестве материала несущих слоев пластины при числовых расчетах принят алюминиевый сплав Д16Т, заполнителя — фторопласт-4 (ПТФЭ). Параметры упругости и нелинейности этих материалов, включенные в формулу (23), приведены в [23]: для Д16Т $A_1 = 0,96$; $\alpha_1 = 2,34$; $\varepsilon_y^{(1)} = 0,735\%$; для фторопласта $A_3 = 0,905$; $\alpha_3 = 1,48$; $\varepsilon_s = \varepsilon_y^{(3)} = 3,3\%$.

При численной реализации итерационного решения (20)–(22) радиус пластины принимался $r_0 = 1$ м. Все геометрические параметры и линейные перемещения отнесены к радиусу r_0 . Величина нагрузки и толщины слоев подбирались так, чтобы нелинейные свойства материалов слоев проявились в достаточной степени: $q = -3$ МПа, $h_1 = h_2 = 0,03$, $c = 0,23$.

Полученные результаты подтвердили практическую сходимость принятого итерационного метода. За искоемое решение принято 4-е приближение, которое отличается от 3-го менее чем на 1 %. Учет физической нелинейности материалов слоев приводит к увеличению расчетных значений искомых функций: радиального перемещения — на 16,9 %; сдвига в заполнителе — 19,4 %; прогиба нижнего слоя — 18,1 %; функции обжатия — 16 %.

Изменение радиальных деформаций $\varepsilon_r^{(k)}$ по толщине пластины показано на рисунке 2. Расчетное увеличение деформаций достигает на контуре 17,6 % и 17,2 % в центре пластины.

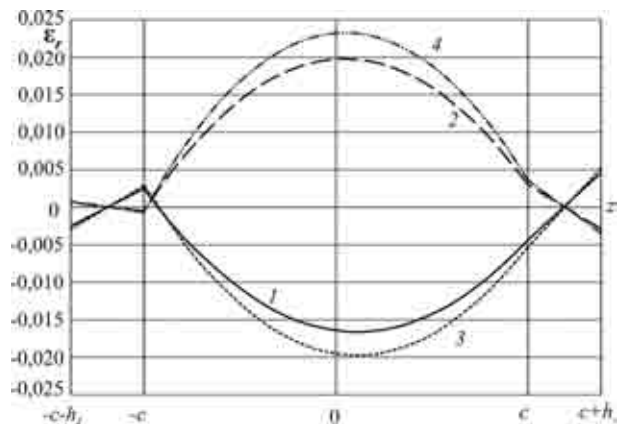


Рисунок 2 — Изменение радиальных деформаций по толщине пластины: 1, 2 — упругие; 3, 4 — с учетом нелинейности (четные — в центре, нечетные — на контуре)

Figure 2 — Changes of radial deformations in plate thickness: 1, 2 — elastic; 3, 4 — taking into account nonlinearity (even — in the center, odd — on the contour)

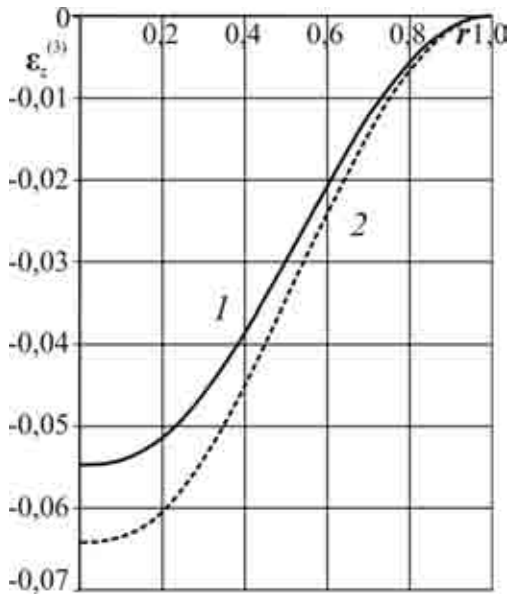


Рисунок 3 — Изменение деформации обжатия вдоль радиуса:
1 — упругая пластина; 2 — упругопластическая
Figure 3 — Change of compressive deformation along radius:
1 — elastic plate; 2 — elastoplastic

На рисунке 3 приведены графики изменения деформации обжатия $\varepsilon_z^{(3)}$ в заполнителе вдоль радиуса. Учет физической нелинейности материалов слоев приводит к увеличению расчетной деформации на 18,2 %.

Распределение областей физической нелинейности материалов слоев (серая заливка) вдоль радиуса трехслойной пластины при различных величинах нагрузки иллюстрирует рисунок 4. Он показывает, что первые пластические деформации

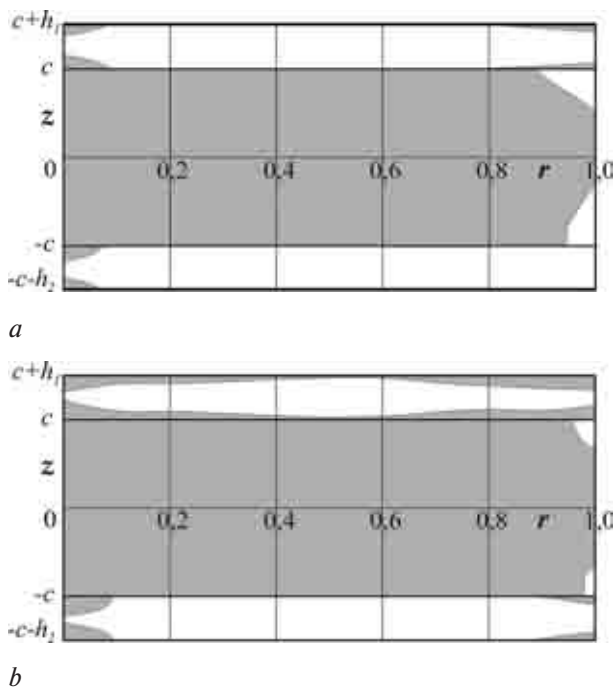


Рисунок 4 — Области физической нелинейности вдоль радиуса пластины: а — $q_0 = 3$ МПа; б — $q_0 = 6$ МПа
Figure 4 — Areas of physical nonlinearity along plate radius:
а — $q_0 = 3$ МПа; б — $q_0 = 6$ МПа

возникают в центре пластины и затем появляются на контуре. Весь заполнитель, за исключением небольшой области на контуре пластины, деформируется нелинейно.

Следует отметить, что прогиб пластины с несжимаемым заполнителем практически совпадает с прогибом срединной плоскости заполнителя при учете сжимаемости. Максимальное отличие от него прогибов несущих слоев составляет около 42 %.

Заключение. Полученное аналитическое решение позволяет проводить алгоритмизацию итерационного процесса и численные исследования НДС круглой трехслойной линейно и нелинейно упругой пластины при осесимметричных нагрузках с учетом обжатия заполнителя. Учет сжимаемости заполнителя и физической нелинейности материалов слоев приводит к существенному уточнению НДС рассматриваемой трехслойной пластины.

Работа выполнена при финансовой поддержке БР ФФИ (проект № T18P-090).

Обозначения

$q(r)$ — внешняя распределенная нагрузка, Па;
 $w(r)$ — прогиб пластины, м;
 $\psi(r)$ — относительный сдвиг в заполнителе, рад;
 $u(r)$ — продольное перемещение срединной плоскости заполнителя, м;
 $v(r)$ — функция обжатия заполнителя, м;
 h_k — толщины слоев ($k = 1, 2, 3$), м;
 G_k, K_k — модули сдвига и объемной деформации, Па;
 $\sigma_\alpha^{(k)}, \sigma_z^{(k)}, \sigma_r^{(k)}, \varepsilon_\alpha^{(k)}, \varepsilon_z^{(k)}, \varepsilon_r^{(k)}$ ($\alpha = r, \varphi; k = 1, 2, 3$) — компоненты тензоров напряжений и деформаций, Па;
 $s_\alpha^{(k)}, s_r^{(k)}, s_z^{(k)}, \vartheta_\alpha^{(k)}, \vartheta_r^{(k)}, \vartheta_z^{(k)}$ ($\alpha = r, \varphi; k = 1, 2, 3$) — дивергенты напряжений и деформаций, Па;
 $\sigma^{(k)}, \varepsilon^{(k)}$ — шаровые тензоры напряжений и деформаций, Па;
 $T_r^0, H_r^0, M_r^0, D_r^0$ — интенсивности усилий и моментов на контуре пластины, Па·м, Па·м²;
 $\omega_k(\varepsilon_u^{(k)})$ — функции нелинейности материалов;
 $\varepsilon_u^{(k)}$ — интенсивность деформаций, б.р.;
 L_2, L_3 — дифференциальные операторы, б.р.;
 $J_n(\beta r), Y_n(\beta r)$ — функции Бесселя первого и второго рода n -го порядка;
 L_2^{-1}, L_3^{-1} — интегральные операторы.

Список литературы

1. Головкин, К.Г. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках / К.Г. Головкин, П.З. Луговой, В.Ф. Мейш. — Киев: Киевский ун-т, 2012. — 541 с.
2. The oblique impact response of composite sandwich plates / I. Ivañez [et al.] // Composite Structures. — 2015. — No. 133. — Pp. 1127–1136.
3. Grover, N. An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates / N. Grover, B.N. Singh, D.K. Maiti // Aerospace Science and Technology. — 2016. — No. 52. — Pp. 41–51.
4. Starovoitov, E.I. Vibrations of round three-layer plates under the action of various types of surface loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // Strength of Materials. — 2003. — Vol. 35, No. 4. — Pp. 346–352.

5. Starovoitov, E.I. Resonant effects of local loads on circular sandwich plates on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // International Applied Mechanics. — 2010. — Vol. 46, No 1. — Pp. 86–93.
6. Паймушин, В.Н. Анализ свободных и собственных колебаний трехслойной пластины на основе уравнений уточненной теории / В.Н. Паймушин, В.И. Иванов, В.Р. Хусаинов // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2002. — Т. 8. — № 4. — С. 543–554.
7. Старовойтов, Э.И. Колебания трехслойных цилиндрических оболочек в упругой среде Винклера при резонансе / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, Ю.М. Плескачевский // Механика машин, механизмов и материалов. — 2013. — № 4 (22). — С. 70–73.
8. Джагангиров, А.А. Несущая способность трехслойной волокнистой композитной кольцевой пластинки, заземленной по кромкам / А.А. Джагангиров // Механика композитных материалов. — 2015. — Т. 51. — № 2. — С. 100–109.
9. Горшков, А.Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 576 с.
10. Старовойтов, Э.И. О переменном нагружении вязкопластических трехслойных пологих оболочек / Э.И. Старовойтов // Вестн. Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 1980. — № 2. — С. 92–96.
11. Москвитин, В.В. Деформация и переменные нагружения двухслойных металлополимерных пластин / В.В. Москвитин, Э.И. Старовойтов // Механика композитных материалов. — 1985. — № 3. — С. 409–416.
12. Горшков, А.Г. Циклические нагружения упругопластических тел в нейтронном потоке / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая // Изв. РАН, Механика твердого тела. — 2001. — № 1. — С. 79–85.
13. Škec, L. Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection / L. Škec, G. Jelenić // Acta Mechanica. — 2014. — Vol. 225, No. 2. — Pp. 523–541.
14. Comparison of Bending Properties for Cellular Core Sandwich Panels / L. Yang [et al.] // Mater. Sci. Appl. — 2013. — Vol. 4, No. 8. — Pp. 471–477.
15. Lee, C.R. System parameters evaluation of flexibly supported laminated composite sandwich plates / C.R. Lee, S.J. Sun, T.Y. Kam // AIAA J. — 2007. — Vol. 45, No. 9. — Pp. 2312–2322.
16. Zenkour, A.M. Bending Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates under the Effect of Mechanical and Thermal Loads / A.M. Zenkour, N.A. Alghamdi // Mech. Adv. Mater. Struct. — 2010. — Vol. 17, No. 6. — Pp. 419–432.
17. Журавков, М.А. Нелинейное деформирование упругопластического трехслойного стержня локальной нагрузкой / М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. — 2016. — № 3 (36). — С. 71–79.
18. Starovoitov, É.I. Thermoelastic bending of a sandwich ring plate on an elastic foundation / É.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // International Applied Mechanics. — 2008. — Vol. 44, № 9. — Pp. 1032–1040.
19. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойного стержня в температурном поле / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. — 2013. — № 1 (6). — С. 31–35.
20. Старовойтов, Э.И. Термоупругое деформирование трехслойной круглой пластины поверхностными нагрузками различных форм / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. — 2018. — № 1 (42). — С. 81–88.
21. Захарчук, Ю.В. Деформирование круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем / Ю.В. Захарчук // Проблемы физики, математики и техники. — 2017. — Т. 33, № 4. — С. 53–57.
22. Старовойтов, Э.И. Изгиб круговой трехслойной пластины с легким сжимаемым наполнителем / Э.И. Старовойтов, Ю.В. Захарчук // Проблемы машиностроения и автоматизации. — 2018. — Т. 37, № 4. — С. 88–97.
23. Старовойтов, Э.И. К описанию термомеханических свойств некоторых конструкционных материалов / Э.И. Старовойтов // Пробл. прочности. — 1988. — № 4. — С. 11–15.

STAROVOITOV Eduard I., D. Sc. in Phys. and Math., Prof.

Head of the Department “Structural Mechanics”¹

E-mail: edstar0@yandex.by

ZAKHARCHUK Yuliya V., Ph. D. in Phys. and Math.

Senior Lecturer of the Department “Building technologies and constructions”¹

E-mail: zakharchuk.julia2@mail.ru

¹Belarusian State University of Transport, Gomel, Republic of Belarus

Received 05 June 2019.

NONLINEAR DEFORMATION OF CIRCULAR SANDWICH PLATES WITH COMPRESSIBLE FILLER

Here is the formulation of the boundary value problem on the bending of an elastoplastic three-layer circular plate with a compressible filler. To describe the kinematics of the package, the hypotheses of the polyline are accepted. For thin bearing layers, the Kirchhoff hypothesis is accepted. In a relatively thick lightweight filler, the Timoshenko hypothesis is performed with a linear approximation of radial displacements and deflection along the layer thickness. The work of shear stresses and compression stresses is assumed to be small and is not taken into account. The physical equations of state in the bearing layers correspond to the nonlinear theory of elasticity. The inhomogeneous system of ordinary nonlinear differential equations of equilibrium is obtained by the Lagrange variational method. Boundary conditions are formulated. The solution of the boundary value problem is reduced to finding the four desired functions — the deflection of the lower layer; shear, radial displacement and compression function in the filler. These functions satisfy an inhomogeneous system of ordinary nonlinear differential equations.

The method of successive approximations based on the method of elastic solutions of Ilyushin is applied for the solution. The general iterative analytical solution of the boundary value problem in Bessel functions is obtained. Its parametric analysis is carried out at uniformly distributed load and rigid sealing of the plate contour. Numerically the effect of nonlinearity of the materials of the layers and compressibility of the filler on the stress-strain state of the plate is studied. The corresponding graphs of the distribution of deformations and areas of nonlinearity along the radius of the plate are given.

Keywords: nonlinear elasticity, three-layer circular plate, compressible filler, deformation

References

1. Golovko K.G., Lugovoy P.Z., Meysh V.F. *Dinamika neodnorodnykh obolochek pri nestatsionarnykh nagruzkakh* [The dynamics of inhomogeneous shells under transient load conditions]. Kiev, Kievskiy universitet Publ., 2012. 541 p.
2. Ivañez I., Moure M.M., Garcia-Castillo S.K., Sanchez-Saez S. The oblique impact response of composite sandwich plates. *Composite Structures*, 2015, no. 133, pp. 1127–1136.
3. Grover N., Singh B.N., Maiti D.K. An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates. *Aerospace Science and Technology*, 2016, no. 52, pp. 41–51.
4. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Yarovaya A.V. Vibrations of round three-layer plates under the action of various types of surface loads. *Strength of Materials*, 2003, vol. 35, no. 4, pp. 346–352.
5. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Resonant effects of local loads on circular sandwich plates on an elastic foundation. *International Applied Mechanics*, 2010, vol. 46, no. 1, pp. 86–93.
6. Paimushin V.N., Ivanov V.I., Khusainov V.R. Analiz svobodnykh i sobstvennykh kolebaniy trekhslonnoy plastiny na osnove uravneniy utochnennoy teorii [Study of free and eigen vibrations of a three-layer plate on the bases of equations of a refined theory]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktivnykh* [Mechanics of composite materials and structures], 2002, vol. 8, no. 4, pp. 543–554.
7. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Pleskatshevsky Yu.M. Kolebaniya trekhslonnykh tsilindricheskikh obolochek v uprugoy srede Vinklerya pri rezonanse [Vibrations of the three-layered cylindrical shells in the elastic winkler's medium at resonance]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2013, no. 4(22), pp. 70–73.
8. Dzhagangirov A.A. Nesushchaya sposobnost trekhslonnoy voloknistoy kompozitnoy koltsevoy plastinki, zashchemlennoy po kromkam [Carrying capacity of a three-layer fibrous composite annular plate, clamped along the edges]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite materials], 2015, vol. 51, no. 2, pp. 100–109.
9. Gorshkov A.G., Starovoitov E.I., Yarovaya A.V. *Mekhanika sloistykh vyazkouprugoplasticheskikh elementov konstruktivnykh* [Mechanics of layered viscoelastic structural elements]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2005. 576 p.
10. Starovoitov E.I. O peremennom nagruzhении vyazkoplasticheskikh trekhslonnykh pologikh obolochek [On variable loading of viscoplastic three-layered shallow shells]. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika* [Bulletin of Moscow University. Series 1: Mathematics. Mechanics], 1980, no. 2, pp. 92–96.
11. Moskvitin V.V., Starovoitov E.I. Deformatsiya i peremennye nagruzheniya dvukhsloynnykh metalopolimernykh plastin [Deformation and variable loading of two-layer metal-polymer plates]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite materials], 1985, vol. 21, no. 3, pp. 267–273.
12. Gorshkov A.G., Starovoitov E.I., Yarovaya A.V. Tsiklicheskie nagruzheniya uprugoplasticheskikh tel v neytronnom potoke [Cyclic loading of elastic-plastic bodies in neutron flux]. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela* [News of RAS. Mechanics of solids], 2001, vol. 36, no. 1, pp. 64–70.
13. Škec L., Jelenić G. Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection. *Acta Mechanica*, 2014, vol. 225, no. 2, pp. 523–541.
14. Yang L., Harrysson O., West H., Cormier D.A. Comparison of Bending Properties for Cellular Core Sandwich Panels. *Materials Sciences and Applications*, 2013, vol. 4, no. 8, pp. 471–477.
15. Lee C. R., Sun S. J., Kam T. Y. System parameters evaluation of flexibly supported laminated composite sandwich plates. *AIAA Journal*, 2007, vol. 45, no. 9, pp. 2312–2322.
16. Zenkour A.M., Alghamdi N.A. Bending Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates under the Effect of Mechanical and Thermal Loads. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2010, vol. 17, no. 6, pp. 419–432.
17. Zhuravkov M.A., Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Nelineynoe deformirovanie uprugoplasticheskogo trekhslonnogo sterzhnya lokalnoy nagruzkoy [The second deformation of the three-layer elastoplastic rod by local load]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2016, no. 3(36), pp. 71–79.
18. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Thermoelastic bending of a sandwich ring plate on an elastic foundation. *International Applied Mechanics*, 2008, vol. 44, no. 9, pp. 1032–1040.
19. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Deformirovanie trekhslonnogo sterzhnya v temperaturnom pole [Deformation of three-layer beam in a temperature field]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2013, no. 1(6), pp. 31–35.
20. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Termouprugoe deformirovanie trekhslonnoy krugloy plastiny poverkhnostnyimi nagruzkami razlichnykh form [Thermoelastic deformation of three-layer circular plate by a surface loads of various forms]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2018, no. 1(42), pp. 81–88.
21. Zakharchuk Yu.V. Deformirovanie krugovoy trekhslonnoy plastiny so szhimaemym zapolnitelem [Deformation of the circular three-layer plate with a compressible filler]. *Problemy fiziki, matematiki i tekhniki* [Problems of physics, mathematics and technics], 2017, vol. 33, no. 4, pp. 53–57.
22. Starovoitov E.I., Zakharchuk Yu.V. Izgib krugovoy trekhslonnoy plastiny s legkim szhimaemym zapolnitelem [Bending of circular three-layer plate with easy compressible filler]. *Problemy mashinostroeniya i avtomatizatsii* [Engineering and automation problems], 2018, no. 4, pp. 88–97.
23. Starovoitov E.I. K opisaniyu termomekhanicheskikh svoystv nekotorykh konstruktivnykh materialov [To the description of thermomechanical properties of some structural materials]. *Problemy prochnosti* [Strength of materials], 1988, no. 4, pp. 11–15.