

УДК 539.3

Э.И. СТАРОВОЙТОВ, д-р физ.-мат. наук, проф.
заведующий кафедрой «Строительная механика»¹
E-mail: edstar0@yandex.by

А.В. НЕСТЕРОВИЧ, магистр техн. наук
ассистент кафедры «Строительная механика»¹
E-mail: alina_nest92@bk.ru

¹Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Республика Беларусь

Поступила в редакцию 02.12.2020.

НЕОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ КРУГОВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ В СВОЕЙ ПЛОСКОСТИ

Приведена постановка краевой задачи о неосесимметричном деформировании упругой трехслойной круговой пластины в своей плоскости. Контур пластины зацелмен. Физические уравнения состояния в слоях пластины описываются соотношениями линейной теории упругости с учетом влияния температуры на упругие характеристики материалов. Уравнения равновесия получены вариационным методом Лагранжа. Сформулированы граничные условия на контуре пластины. Решение краевой задачи сведено к нахождению радиального и тангенциального перемещений в слоях пластины. Эти перемещения удовлетворяют неоднородной системе обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Для ее решения применен метод разложения в тригонометрические ряды Фурье. После подстановки рядов в исходную систему уравнений равновесия и проведения соответствующих преобразований для определения четырех радиальных функций в каждом члене ряда получена система обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Аналитическое решение выписано в конечном виде в случае воздействия косинусоидальных радиальных и синусоидальных окружных нагрузок, линейно зависящих от радиальной координаты. Нагрузка приложена в срединной плоскости заполнителя. Проведена численная апробация решения. Исследована зависимость радиальных и тангенциальных перемещений от полярных координат и температуры. Приведены графики изменения перемещений вдоль радиуса пластины при различных значениях угловой координаты. Проиллюстрирована слабая зависимость перемещений от температуры при закреплённом контуре пластины.

Ключевые слова: трехслойная круговая пластина, упругость, неосесимметричная нагрузка, перемещения, численные результаты

DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2021-1-54-38-45>

Введение. Впервые трехслойные конструкции были применены в строительстве еще в середине XIX века. В 40-х годах прошлого столетия начали появляться первые самолеты с трехслойными силовыми элементами. В дальнейшем подобные конструкции нашли свое применение в аэрокосмическом и транспортном машиностроении, строительстве, добыче и транспортировке углеводородов. Все это обусловило спрос на слоистые, в том числе трехслойные, элементы конструкций. В связи с этим возникла необходимость разработки механико-математических моделей и методов расчета трехслойных элементов конструкций на различные виды и типы нагрузок. Стержни, пластины и оболочки, имеющие слоистую структуру, обычно набраны из материалов с существенно различными физико-механическими свойствами.

Несущие слои из материалов высокой прочности и жесткости предназначены для восприятия основной части механической нагрузки. Связующие слои, служащие для образования монолитной конструкции, предназначены для перераспределения усилий между несущими слоями. Такое сочетание слоев позволяет обеспечить надежную работу систем в неблагоприятных условиях окружающей среды (температура, радиация), создавать конструкции, сочетающие высокую прочность и жесткость с относительно малой массой.

В настоящее время разработка общей теории квазистатических деформаций трехслойных конструкций транспортной техники, в том числе и пластин, еще не завершена и интенсивно продолжается. Вопросам построения теорий квазистатических и динамических нагружений

слоистых элементов конструкций посвящены монографии [1–4]. Задачи о свободных и вынужденных колебаниях слоистых, в том числе трехслойных пластин и оболочек, рассмотрены в публикациях [5–9].

Публикации [10–11] содержат результаты о поперечных колебаниях трехслойных пластин, связанных с упругим основанием Винклера. Исследованы собственные и вынужденные колебания под действием гармонических, импульсных и резонансных нагрузок. Кинематика деформирования принята соответствующей кинематическим гипотезам ломаной линии, решения построены в виде разложения в ряд по системе собственных ортонормированных функций. Изучены частоты собственных колебаний при различных граничных условиях.

В работах [12–14] приведена методика расчета эффективности виброизоляции однослойного и многослойного ограждений, исследована несущая способность трехслойной волокнистой композитной кольцевой пластинки и прочностных моделей многослойных костей человека. В статьях [15, 16] разрабатывается теория переменного нагружения упругопластических пластин и оболочек. Работы [17–21] посвящены развитию теории многослойных оболочек и разработке методов решения прикладных задач.

В статьях [22–25] исследуется влияние теплового воздействия на трехслойные стержни, пластины и оболочки. В несущих слоях предполагается выполнение гипотез Кирхгофа, в заполнителе справедлива гипотеза Тимошенко. В относительно толстом заполнителе учтена работа внутренних сил в тангенциальном направлении. Решения получены в функциях Бесселя, проведена их численная апробация. Квазистатическое деформирование трехслойных пластин на упругих основаниях Винклера и Пастернака исследовано в [26, 27]. Напряженно-деформированное состояние трехслойных пластин со сжимаемым заполнителем изучалось в статьях [28–30].

В классической монографии [31] приводятся задачи о совместном изгибе и растяжении или сжатии круглой пластины.

В работах [32, 33] рассматриваются задачи об изгибе круглой и кольцевой пластинок на упругом основании Винклера под действием сосредоточенной силы, приложенной в произвольной точке пластинки. Получены формулы в виде бесконечного ряда по собственным функциям. Дифференцированием этих рядов можно получить выражения для изгибающих, крутящих моментов и поперечных сил в пластинках.

Следует отметить, что исследование неосесимметричного деформирования однослойных круглых пластин проводилось, как правило, с использованием решения А. Клебша, полученного еще в XIX веке [3].

Работы, посвященные деформированию трехслойной пластины в своей плоскости [34–36], рассматривают лишь частные случаи нагружения: осесимметричное, неосесимметричное радиальной нагрузкой. Поэтому здесь приведена общая постановка и методика решения краевой задачи о деформировании круговой трехслойной пластины под действием неосесимметричных нагрузок, предложено решение конкретной краевой задачи.

Постановка краевой задачи. Рассматривается несимметричная по толщине круглая трехслойная пластина с закрепленным контуром. Пластина состоит из двух тонких несущих слоев высокой прочности и относительно толстого заполнителя. На границах слоев перемещения непрерывны.

Постановка задачи приводится в цилиндрической системе координат r, φ, z , связанной со срединной плоскостью заполнителя (рисунок 1). Предполагается, что на контуре пластины имеется жесткая диафрагма, которая препятствует относительному сдвигу слоев. В срединной плоскости заполнителя приложена результирующая распределенная нагрузка, проекции которой на координатные оси: $p_r(r, \varphi), p_\varphi(r, \varphi)$. Под ее воздействием в пластине возникают радиальные $u_r(r, \varphi)$ и тангенциальные $u_\varphi(r, \varphi)$ перемещения, которые в дальнейшем считаются искомыми.

Соответствующие радиальные и тангенциальные деформации будут определяться соотношениями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= u_{r,r}; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_{\varphi,\varphi} + u_r}{r}; \\ \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2r} (u_{r,\varphi} - u_{\varphi,r} + u_{\varphi,r,r}). \end{aligned} \quad (1)$$

Уравнения равновесия рассматриваемой круглой трехслойной пластины получены с помощью вариационного принципа Лагранжа:

$$\delta A = \delta W, \quad (2)$$

где $\delta A, \delta W$ — вариации работы внешней нагрузки и внутренних сил упругости:

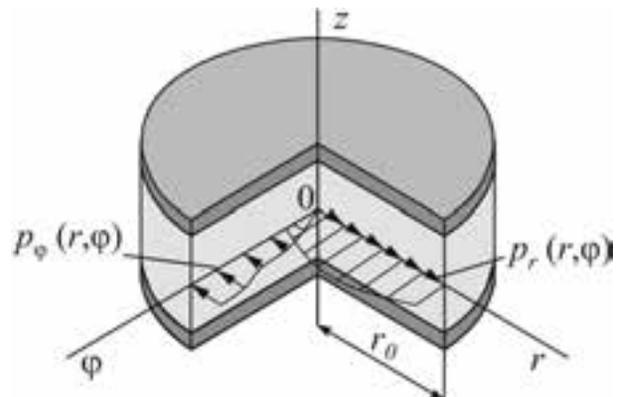


Рисунок 1 — Расчетная схема трехслойной пластины
Figure 1 — Design scheme of a three-layer plate

$$\delta A = \iint_S (p_r \delta u_r + p_\varphi \delta u_\varphi) r dr d\varphi;$$

$$\delta W = \iint_S \left[\sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \left(\sigma_{rr}^{(k)} \delta \varepsilon_{rr}^{(k)} + \sigma_{\varphi\varphi}^{(k)} \delta \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(k)} + 2\sigma_{r\varphi}^{(k)} \delta \varepsilon_{r\varphi}^{(k)} \right) dz \right] r dr d\varphi.$$

Напряжения и деформации в пластине связаны законом Гука, с учетом температуры:

$$s_{\alpha\beta}^{(k)} = 2G_k(T_k) \varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)};$$

$$\sigma^{(k)} = 3K_k(T_k) (\varepsilon^{(k)} - \alpha_0^{(k)} \Delta T_k), \quad (3)$$

$$\alpha, \beta = r, \varphi, \quad k = 1, 2, 3;$$

где k — номер слоя; $s_{\alpha\beta}^{(k)}, \varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}, \sigma^{(k)}, \varepsilon^{(k)}$ — девиаторные и шаровые части тензоров напряжений и деформаций; $G_k(T_k), K_k(T_k)$ — термозависимые сдвиговой и объемный модули упругости материалов; $\alpha_0^{(k)}$ — коэффициент линейного температурного расширения; ΔT_k — приращение температуры в k -м слое.

Обобщенные внутренние силы в пластине вводятся с помощью компонентов тензора напряжений $\sigma_{\alpha\beta}^{(k)}$ ($\alpha, \beta = r, \varphi$):

$$T_{\alpha\beta} \equiv \sum_{k=1}^3 T_{\alpha\beta}^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} dz. \quad (4)$$

После проведения необходимых преобразований из (2) получим систему дифференциальных уравнений равновесия в обобщенных внутренних усилиях:

$$T_{rr,r} + \frac{1}{r} (T_{r\varphi,\varphi} + T_{rr} - T_{\varphi\varphi}) = -p_r; \quad (5)$$

$$T_{r\varphi,r} + \frac{1}{r} (T_{\varphi\varphi,\varphi} + 2T_{r\varphi}) = -p_\varphi.$$

На контуре пластины $r = r_0$ должны выполняться силовые условия:

$$T_{rr} = T_{rr}^0; \quad T_{r\varphi} = T_{r\varphi}^0, \quad (6)$$

где $T_{rr}^0, T_{r\varphi}^0$ — заданные на контуре внешние силы.

Выражения внутренних усилий (4) через перемещения получим, используя деформации (1) и напряжения (3):

$$T_{rr} = a_1 u_{r,r} + \frac{a_2}{r} (u_{\varphi,\varphi} + u_r) - 3 \sum_{k=1}^3 \int K_k \alpha_0^{(k)} \Delta T_k dz;$$

$$T_{\varphi\varphi} = a_2 u_{r,r} + \frac{a_1}{r} (u_{\varphi,\varphi} + u_r) - 3 \sum_{k=1}^3 \int K_k \alpha_0^{(k)} \Delta T_k dz; \quad (7)$$

$$T_{r\varphi} = \frac{a_3}{r} (u_{r,\varphi} + r u_{\varphi,r} - u_\varphi),$$

где коэффициенты

$$a_1 = \sum_{k=1}^3 \int \left(K_k(T_k) + \frac{4}{3} G_k(T_k) \right) dz;$$

$$a_2 = \sum_{k=1}^3 \int \left(K_k(T_k) - \frac{2}{3} G_k(T_k) \right) dz;$$

$$a_3 = \sum_{k=1}^3 \int G_k(T_k) dz.$$

Подставив внутренние усилия (7) в уравнения равновесия (5) и проведя замену переменной

$$r = r_0 x, \quad (8)$$

получим систему дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях:

$$L_2(u_r) + \frac{a_3}{a_1 x^2} u_{r,\varphi} + \frac{a_2 + a_3}{a_1 x} u_{\varphi,\varphi} - \frac{a_1 + a_3}{a_1 x^2} u_{\varphi,\varphi} = -\frac{p_r r_0^2}{a_1}; \quad (9)$$

$$L_2(u_\varphi) + \frac{a_2 + a_3}{a_3 x} u_{r,\varphi} + \frac{a_1}{a_3 x^2} u_{\varphi,\varphi} + \frac{a_1 + a_3}{a_3 x^2} u_{x,\varphi} = -\frac{p_\varphi r_0^2}{a_3},$$

где x — безразмерная радиальная координата; L_2 — дифференциальный оператор

$$L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{x} (xg)_{,x} \right)_{,x} \equiv g_{,xx} + \frac{g_{,x}}{x} - \frac{g}{x^2}.$$

Следует отметить, что температура в явном виде в уравнения (9) не входит, она влияет только на величину модулей упругости материалов слоев. Добавив к системе (9) граничные условия в усилиях (6) или перемещениях для закрепленного контура, получим замкнутую краевую задачу для определения перемещений в трехслойной пластине при неосесимметричном деформировании в ее плоскости.

Решение краевой задачи. Решение системы дифференциальных уравнений (9) предполагаем в виде разложения в ряды Фурье:

$$u_r(x, \varphi) = u_{r0}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[u_{rn}^{(1)}(x) \cos(n\varphi) + u_{rn}^{(2)}(x) \sin(n\varphi) \right];$$

$$u_\varphi(x, \varphi) = u_{\varphi0}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[u_{\varphi n}^{(1)}(x) \cos(n\varphi) + u_{\varphi n}^{(2)}(x) \sin(n\varphi) \right];$$

$$p_r(x, \varphi) = p_{r0}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[p_{rn}^{(1)}(x) \cos(n\varphi) + p_{rn}^{(2)}(x) \sin(n\varphi) \right]; \quad (10)$$

$$p_\varphi(x, \varphi) = p_{\varphi0}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[p_{\varphi n}^{(1)}(x) \cos(n\varphi) + p_{\varphi n}^{(2)}(x) \sin(n\varphi) \right],$$

где $u_{r0}(x), u_{\varphi0}(x)$ — перемещения от симметричной части нагрузки, например, температуры; $u_{rn}^{(1)}(x), u_{rn}^{(2)}(x), u_{\varphi n}^{(1)}(x), u_{\varphi n}^{(2)}(x)$ — составляющие асимметричных перемещений, зависящие от радиальной координаты; n — номер члена ряда; $p_{r0}(x), p_{\varphi0}(x)$ — симметричные составляющие нагрузки; $p_{rn}^{(1)}(x), p_{rn}^{(2)}(x), p_{\varphi n}^{(1)}(x), p_{\varphi n}^{(2)}(x)$ — асимметричные составляющие внешних нагрузок, которые вычисляются по формулам:

$$p_{rn}^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p_r(x, \varphi) \cos(n\varphi) d\varphi;$$

$$p_{rn}^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p_r(x, \varphi) \sin(n\varphi) d\varphi;$$

$$p_{\varphi n}^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p_\varphi(x, \varphi) \cos(n\varphi) d\varphi;$$

$$p_{\varphi n}^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p_\varphi(x, \varphi) \sin(n\varphi) d\varphi.$$

После подстановки перемещений и нагрузок (10) в систему уравнений (9) и необходимых стандартных преобразований получим систему из четырех обыкновенных линейных дифферен-

циальных уравнений для определения искомых функций $u_m^{(1)}(x)$, $u_m^{(2)}(x)$, $u_{\phi n}^{(1)}(x)$, $u_{\phi n}^{(2)}(x)$:

$$\begin{aligned} L_2(u_m^{(1)}(x)) - \frac{a_3 n^2}{a_1 x^2} u_m^{(1)}(x) + \frac{(a_2 + a_3)n}{a_1 x} u_{\phi n}^{(2)}(x) - \\ - \frac{(a_1 + a_3)n}{a_1 x^2} u_{\phi n}^{(2)}(x) = -\frac{r_0^2}{a_1} p_m^{(1)}(x); \\ L_2(u_{\phi n}^{(2)}(x)) - \frac{a_1 n^2}{a_3 x^2} u_{\phi n}^{(2)}(x) - \frac{(a_2 + a_3)n}{a_3 x} u_m^{(1)}(x) - \\ - \frac{(a_1 + a_3)n}{a_3 x^2} u_m^{(1)}(x) = -\frac{r_0^2}{a_3} p_{\phi n}^{(2)}(x); \\ L_2(u_m^{(2)}(x)) - \frac{a_3 n^2}{a_1 x^2} u_m^{(2)}(x) - \frac{(a_2 + a_3)n}{a_1 x} u_{\phi n}^{(1)}(x) + \\ + \frac{(a_1 + a_3)n}{a_1 x^2} u_{\phi n}^{(1)}(x) = -\frac{r_0^2}{a_1} p_m^{(2)}(x); \\ L_2(u_{\phi n}^{(1)}(x)) - \frac{a_1 n^2}{a_3 x^2} u_{\phi n}^{(1)}(x) + \frac{(a_2 + a_3)n}{a_3 x} u_m^{(2)}(x) + \\ + \frac{(a_1 + a_3)n}{a_3 x^2} u_m^{(2)}(x) = -\frac{r_0^2}{a_3} p_{\phi n}^{(1)}(x). \end{aligned} \quad (11)$$

Частный случай. Пусть неосесимметричные нагрузки линейно зависят от радиальной координаты:

$$\begin{aligned} p_r(x, \varphi) &= p_{r1}(1-x)\cos\varphi; \\ p_{\varphi}(x, \varphi) &= p_{\phi 1}(1-x)\sin\varphi, \end{aligned} \quad (12)$$

где $p_{r1} = \text{const}$, $p_{\phi 1} = \text{const}$.

В этом случае $p_r^{(1)}(r) = p_{r1}(1-x)$, $p_{\phi 1}^{(2)}(x) = p_{\phi 1}(1-x)$. Остальные составляющие нагрузок при $n > 1$ равны нулю. Тогда система (11) с учетом (12) принимает вид:

$$\begin{aligned} L_2(u_{r1}^{(1)}(x)) - \frac{a_3}{a_1 x^2} u_{r1}^{(1)}(x) + \frac{a_2 + a_3}{a_1 x} u_{\phi 1}^{(2)}(x) - \\ - \frac{a_1 + a_3}{a_1 x^2} u_{\phi 1}^{(2)}(x) = -\frac{r_0^2}{a_1} p_{r1}(1-x); \\ L_2(u_{\phi 1}^{(2)}(x)) - \frac{a_1}{a_3 x^2} u_{\phi 1}^{(2)}(x) - \frac{a_2 + a_3}{a_3 x} u_{r1}^{(1)}(x) - \\ - \frac{a_1 + a_3}{a_3 x^2} u_{r1}^{(1)}(x) = -\frac{r_0^2}{a_3} p_{\phi 1}(1-x); \\ L_2(u_{r1}^{(2)}(x)) - \frac{a_3}{a_1 x^2} u_{r1}^{(2)}(x) - \frac{a_2 + a_3}{a_1 x} u_{\phi 1}^{(1)}(x) + \\ + \frac{a_1 + a_3}{a_1 x^2} u_{\phi 1}^{(1)}(x) = 0; \\ L_2(u_{\phi 1}^{(1)}(x)) - \frac{a_1}{a_3 x^2} u_{\phi 1}^{(1)}(x) + \frac{a_2 + a_3}{a_3 x} u_{r1}^{(2)}(x) + \\ + \frac{a_1 + a_3}{a_3 x^2} u_{r1}^{(2)}(x) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Эта система уравнений распадается на две по два уравнения. Решение системы из третьего и четвертого уравнений в (13) при нулевых граничных условиях (отсутствии нагрузки или перемещений и их производных на контуре) дает тривиальное решение:

$$u_{r1}^{(2)} \equiv u_{\phi 1}^{(1)} \equiv 0.$$

Решение системы из первых двух уравнений (13) будет следующее:

$$\begin{aligned} u_{r1}^{(1)} &= -C_{11} + C_{12} \left(\frac{a_1 + a_2}{3a_1 - a_2} - \ln x \right) + C_{13} x^{-2} + \\ &+ C_{14} \frac{a_1 - 3a_2}{5a_1 + a_2} x^2 + u_{r1}^{(1)*}(x); \end{aligned} \quad (14)$$

$$u_{\phi 1}^{(2)} = C_{11} + C_{12} \ln x + C_{13} x^{-2} + C_{14} x^2 + u_{\phi 1}^{(2)*}(x),$$

где C_{1i} константы интегрирования; $u_{r1}^{(1)*}(x)$, $u_{\phi 1}^{(2)*}(x)$ — частные решения

$$\begin{aligned} u_{r1}^{(1)*} &= \left[\frac{1}{64(5a_1 + a_2)} \left(-(51a_1^2 + 14a_1a_2 + 11a_2^2) p_{r1} + \right. \right. \\ &+ (77a_1^2 - 142a_1a_2 - 11a_2^2) p_{\phi 1} \left. \right) - \frac{1}{16} (a_1 - 3a_2) (p_{r1} + p_{\phi 1}) \ln x + \\ &+ \frac{2}{45} \left((3a_1 - 4a_2) p_{r1} - 2a_2 p_{\phi 1} \right) x \left. \right] \frac{x^2 r_0^2}{a_1 (a_1 - a_2)}; \\ u_{\phi 1}^{(2)*} &= \left[\frac{1}{45} \left(2(3a_1 + a_2) p_{r1} + (15a_1 + a_2) p_{\phi 1} \right) x + \right. \\ &+ \left. \frac{5a_1 + a_2}{64} (p_{r1} + p_{\phi 1}) (5 - 4 \ln x) \right] \frac{x^2 r_0^2}{a_1 (a_1 - a_2)}. \end{aligned}$$

Исходя из условия ограниченности перемещений в центре пластины, необходимо в решении (14) положить $C_{12} = C_{13} = 0$. В результате имеем:

$$\begin{aligned} u_{r1}^{(1)} &= -C_{11} + C_{14} \frac{a_1 - 3a_2}{5a_1 + a_2} x^2 + u_{r1}^{(1)*}(x); \\ u_{\phi 1}^{(2)} &= C_{11} + C_{14} x^2 + u_{\phi 1}^{(2)*}(x). \end{aligned} \quad (15)$$

Константы интегрирования получим из однородных граничных условий (6):

$$C_{11} = -B_2 - C_{14}; \quad C_{14} = -\frac{B_1 + B_2}{A_1 + 1}, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} B_1 &= \left[\frac{1}{64(5a_1 + a_2)} \left(-(51a_1^2 + 14a_1a_2 + 11a_2^2) p_{r1} + \right. \right. \\ &+ (77a_1^2 - 142a_1a_2 - 11a_2^2) p_{\phi 1} \left. \right) + \\ &+ \frac{2}{45} \left((3a_1 - 4a_2) p_{r1} - 2a_2 p_{\phi 1} \right) \left. \right] \frac{r_0^2}{a_1 (a_1 - a_2)}; \\ B_2 &= \left[\frac{1}{45} \left(2(3a_1 + a_2) p_{r1} + (15a_1 + a_2) p_{\phi 1} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{5(5a_1 + a_2)}{64} (p_{r1} + p_{\phi 1}) \right] \frac{r_0^2}{a_1 (a_1 - a_2)}; \\ A_1 &= \frac{a_1 - 3a_2}{5a_1 + a_2}. \end{aligned}$$

Полные перемещения следуют из (10):

$$u_r(x, \varphi) = u_{r1}^{(1)}(x) \cos \varphi; \quad u_{\varphi}(x, \varphi) = u_{\phi 1}^{(2)}(x) \sin \varphi,$$

где $u_{r1}^{(1)}(x)$, $u_{\phi 1}^{(2)}(x)$ определяются соотношениями (15), с учетом (16), (8).

Численные результаты. Численная апробация решения проведена в математическом пакете

Maple. Материалы слоев принимались следующие: Д16Т–фторопласт-4–Д16Т. Размеры пластины: радиус $r_0 = 1$ м, толщины слоев $h_1 = 0,02$ м, $h_2 = 0,04$ м, $h_3 = 0,4$ м. Нагрузка $p_{r1} = 10$ МПа, $p_{\phi1} = 10$ МПа, температура принимается усредненной по толщине пластины. Механические характеристики материалов заимствованы из [3]: для сплава Д16-Т — $G = 0,267 \cdot 10^5$ МПа, $K = 0,8 \cdot 10^5$ МПа при $T_0 = 293$ К; для фторопласта-4 — $G_3 = 90$ МПа, $K_3 = 345$ МПа. Изменения параметров упругости материалов при повышении температуры описывается линейной формулой Белла [3].

Рисунок 2 показывает изменение радиальных перемещений $u_r(x, \varphi)$ вдоль радиуса пластины при различных значениях угловой координаты (изотермическое нагружение $T = 293$ К). Положительный знак перемещений показывает растяжение, отрицательный — сжатие. Таким образом, первая и четвертая четверти пластины растянуты, вторая и третья — сжаты. Максимальные значения радиальные перемещения достигают по модулю в центре пластины.

Аналогичное изменение тангенциальных перемещений $u_\varphi(x, \varphi)$ иллюстрирует рисунок 3. Максимальные значения тангенциальных перемещений совпадают по модулю с радиальными и достигаются в центре пластины. Точки верхней части пластины перемещаются по часовой стрелке, т. к. соответствующие тангенциальных перемещений отрицательные, нижней — против часовой стрелки.

Рисунки 4, 5 иллюстрируют изменения радиальных $u_r(x, \varphi)$ (при $\varphi = 0$) и тангенциальных $u_\varphi(x, \varphi)$ (при $\varphi = 3\pi/2$) перемещений вдоль радиуса пластины при различных температурах. При нагреве на 30 К перемещения увеличиваются примерно на 3,2 %; при нагреве на 80 К — примерно на 7,7 %.

Выводы. Приведенная методика позволяет проводить анализ напряженно-деформированного состояния круговой трехслойной пластины при

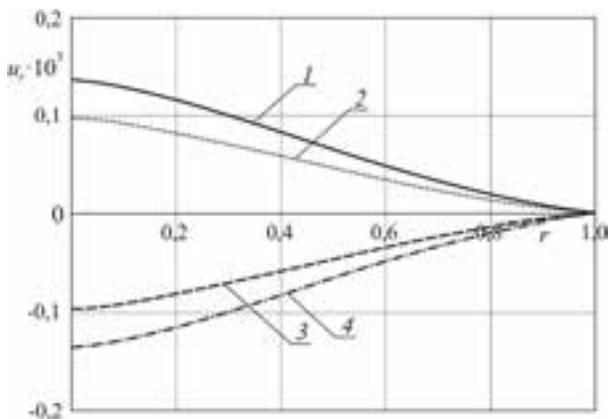


Рисунок 2 — Изменение радиальных перемещений $u_r(x, \varphi)$ вдоль радиуса пластины: 1 — $\varphi = 0, 2\pi$; 2 — $\varphi = \pi/4, 7\pi/4$; 3 — $\varphi = 3\pi/4, 5\pi/4$; 4 — $\varphi = \pi$
Figure 2 — Change in radial displacements of $u_r(x, \varphi)$ along the plate radius: 1 — $\varphi = 0, 2\pi$; 2 — $\varphi = \pi/4, 7\pi/4$; 3 — $\varphi = 3\pi/4, 5\pi/4$; 4 — $\varphi = \pi$

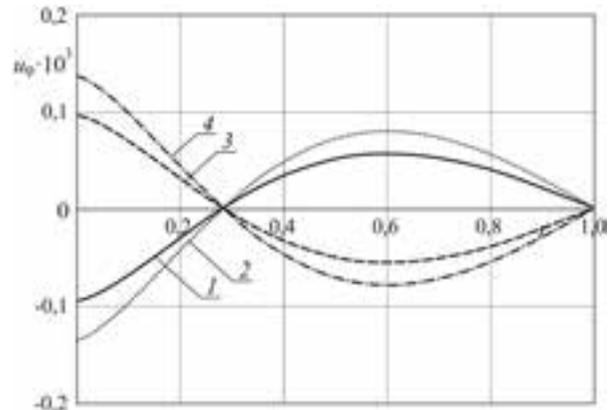


Рисунок 3 — Изменение тангенциальных перемещений $u_\varphi(x, \varphi)$ вдоль радиуса пластины: 1 — $\varphi = \pi/4, 3\pi/4$; 2 — $\varphi = \pi/2$; 3 — $\varphi = 5\pi/4, 7\pi/4$; 4 — $\varphi = 3\pi/2$
Figure 3 — Change in tangential displacements $u_\varphi(x, \varphi)$ along the plate radius: 1 — $\varphi = \pi/4, 3\pi/4$; 2 — $\varphi = \pi/2$; 3 — $\varphi = 5\pi/4, 7\pi/4$; 4 — $\varphi = 3\pi/2$

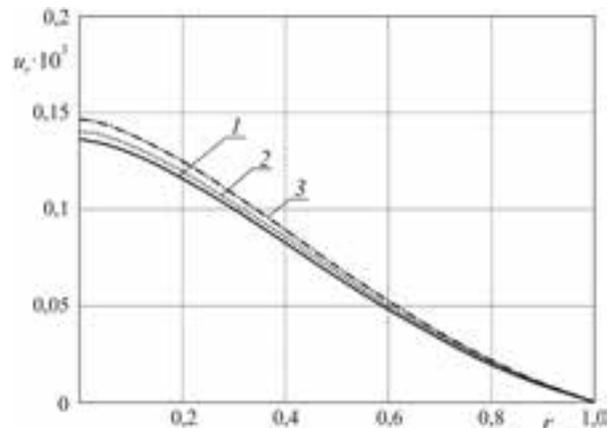


Рисунок 4 — Изменение радиальных термосиловых перемещений $u_r(x, \varphi)$ вдоль радиуса пластины при $\varphi = 0$: 1 — $T = 293$ К; 2 — $T = 323$ К; 3 — $T = 373$ К
Figure 4 — Change in the thermal-force radial displacements $u_r(x, \varphi)$ along the plate radius at $\varphi = 0$: 1 — $T = 293$ К; 2 — $T = 323$ К; 3 — $T = 373$ К

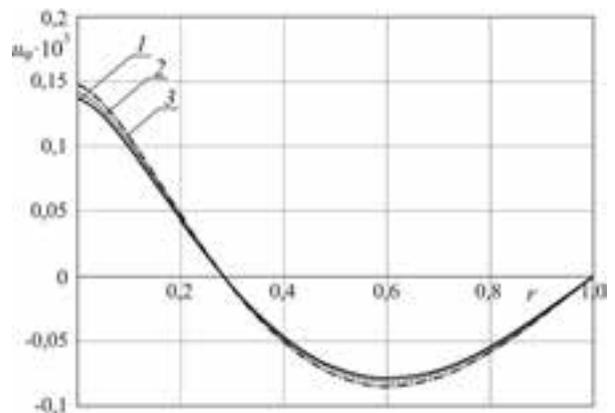


Рисунок 5 — Изменение тангенциальных термосиловых перемещений $u_\varphi(x, \varphi)$ вдоль радиуса пластины при $\varphi = 3\pi/2$: 1 — $T = 293$ К; 2 — $T = 323$ К; 3 — $T = 373$ К
Figure 5 — Change in tangential thermal-force displacements $u_\varphi(x, \varphi)$ along the plate radius at $\varphi = 3\pi/2$: 1 — $T = 293$ К; 2 — $T = 323$ К; 3 — $T = 373$ К

неосесимметричных нагрузках в ее плоскости. Влияние температуры на перемещения при закреплённом контуре незначительно.

Работа выполнена при финансовой поддержке БР ФФИ (проект № T20P-047).

Список обозначений

$p_r(x, \varphi)$, $p_\varphi(x, \varphi)$ — внешняя распределенная нагрузка, МПа;
 r, φ, z — цилиндрическая система координат;
 $u_r(x, \varphi)$, $u_\varphi(x, \varphi)$ — радиальные и тангенциальные перемещения, м;
 $u_m^{(1)}(x)$, $u_m^{(2)}(x)$, $u_{\varphi m}^{(1)}(x)$, $u_{\varphi m}^{(2)}(x)$ — радиальные составляющие перемещений;
 G_k , K_k — модули сдвига и объемной деформации, МПа;
 L_2 — дифференциальный оператор;
 k — номер слоя;
 r_0 — радиус пластины, м;
 x — безразмерная радиальная координата;
 h_1, h_2, h_3 — толщины слоев, м;
 δA — вариация работы внешних сил;
 δW — вариация работы сил упругости;
 $s_{ij}^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$ — девиаторная и шаровая часть тензора напряжений, МПа;
 $\varepsilon_{ij}^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ — девиаторная и шаровая часть тензора деформаций, б.р.;
 $p_{rm}^{(1)}(x)$, $p_{rm}^{(2)}(x)$, $p_{\varphi m}^{(1)}(x)$, $p_{\varphi m}^{(2)}(x)$ — радиальные составляющие внешних нагрузок;
 n — номер члена ряда.

Список литературы

1. Головкин, К.Г. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках / К.Г. Головкин, П.З. Луговой, В.Ф. Мейш. — Киев: Киевский ун-т, 2012. — 541 с.
2. Aghalovyan, L. Asymptotic theory of anisotropic plates and shells / L. Aghalovyan. — Singapore–London: World Scientific Publishing, 2015. — 376 p.
3. Журавков, М.А. Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности: учеб. пособие / М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов. — Минск: БГУ, 2011. — 543 с.
4. Старовойтов, Э.И. Трехслойные стержни в терморadiационных полях / Э.И. Старовойтов, М.А. Журавков, Д.В. Леоненко. — Минск: Бел. наука, 2017. — 275 с.
5. Старовойтов, Э.И. Колебания трехслойных цилиндрических оболочек в упругой среде Винклера при резонансе // Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, Ю.М. Плещачевский // Механика машин, механизмов и материалов. — 2013. — № 4(25). — С. 70–73.
6. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойной круговой цилиндрической оболочки в температурном поле / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, Д.В. Тарлаковский // Проблемы машиностроения и автоматизации. — 2016. — № 1. — С. 91–97.
7. The oblique impact response of composite sandwich plates / I. Ivañez [et al.] // Composite Structures. — 2015. — № 133. — Pp. 1127–1136.
8. Паймушин, В.Н. Анализ свободных и собственных колебаний трехслойной пластины на основе уравнений уточненной теории / В.Н. Паймушин, В.И. Иванов, В.Р. Хусаинов // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2002. — Т. 8, № 4. — С. 543–555.
9. Grover, N. An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates / N. Grover, B.N. Singh, D.K. Maiti // Aerospace Science and Technology. — 2016. — No. 52. — Pp. 41–51.
10. Старовойтов, Э.И. Резонансные колебания круговых композитных пластин на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, Д.В. Тарлаковский // Механика композитных материалов. — 2015. — Т. 51, № 5. — С. 793–806.
11. Старовойтов, Э.И. Колебания круговых композитных пластин на упругом основании под действием локальных нагрузок / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Механика композитных материалов. — 2016. — Т. 52, № 5. — С. 943–954.
12. Василевич, Ю.В. Метод расчета эффективности виброизоляции однослойного и многослойного ограждений в твердой упругой среде / Ю.В. Василевич, В.В. Неумержицкий // Механика машин, механизмов и материалов. — 2009. — № 1(6). — С. 56–58.
13. Джагангиров, А.А. Несущая способность трехслойной волокнистой композитной кольцевой пластинки, защемленной по кромкам / А.А. Джагангиров // Механика композитных материалов. — 2016. — Т. 52, № 2. — С. 385–398.
14. Чигарев, А.В. Исследование моделей многослойных костей человека на прочность при нагружении / А.В. Чигарев, А.В. Борисов // Механика машин, механизмов и материалов. — 2009. — № 1(6). — С. 85–87.
15. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойного стержня в температурном поле / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. — 2013. — № 1(22). — С. 31–35.
16. Москвитин, В.В. Деформация и переменные нагружения двухслойных металлополимерных пластин / В.В. Москвитин, Э.И. Старовойтов // Механика композитных материалов. — 1985. — № 3. — С. 409–416.
17. Škec, L. Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection / L. Škec, G. Jelenić // Acta Mechanica. — 2014. — Vol. 225, no. 2. — Pp. 523–541.
18. Belinha, J. Nonlinear Analysis of Plates and Laminates Using the Element Free Galerkin Method / J. Belinha, L.M. Dints // Composite Structures. — 2007. — Vol. 78, no. 3. — Pp. 337–350.
19. A Comparison of Bending Properties for Cellular Core Sandwich Panels / L. Yang [et al.] // Materials Sciences and Applications. — 2013. — Vol. 4, no. 8. — Pp. 471–477.
20. Lee, C.R. System parameters evaluation of flexibly supported laminated composite sandwich plates / C.R. Lee, S.J. Sun, T.Y. Kam // AIAA Journal. — 2007. — Vol. 45, no. 9. — Pp. 2312–2322.
21. Analysis of laminated composite plates using higher-order shear deformation plate theory and mode-based smoother discrete shear gap method / C.H. Thai [et al.] // Applied Mathematical Modeling. — 2012. — Vol. 36, no. 11. — Pp. 5657–5677.
22. Zenkour, A.M. Thermomechanical bending response of functionally graded nonsymmetric sandwich plates / M.A. Zenkour, N.A. Alghamdi // Journal of Sandwich Structures and Materials. — 2010. — Vol. 12, no. 1. — Pp. 7–46.
23. Zenkour, A.M. Bending Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates under the Effect of Mechanical and Thermal Loads / A.M. Zenkour, N.A. Alghamdi // Mechanics of Advanced Materials and Structures. — 2010. — Vol. 17, no. 6. — Pp. 419–432.
24. Dallot, J. Limit analysis of multi-layered plates. Part I: The Homogenized Love–Kirchhoff Model / J. Dallot, K. Sab // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 2008. — Vol. 56, no. 2. — Pp. 561–580.
25. Старовойтов, Э.И. Термоупругое деформирование трехслойной круглой пластины поверхностными нагрузками различных форм / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. — 2018. — № 1(42). — С. 81–88.
26. Старовойтов, Э.И. Деформирование локальными нагрузками композитной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, М. Сулейман // Механика композитных материалов. — 2007. — Т. 43, № 1. — С. 109–120.
27. Козел, А.Г. Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины на основании Пастернака / А.Г. Козел // Механика. Исследования и инновации. — 2018. — Вып. 11. — С. 127–133.
28. Захарчук, Ю.В. Деформирование круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем / Ю.В. Захарчук // Проблемы физики, математики и техники. — 2017. — Т. 33, № 4. — С. 53–57.
29. Старовойтов, Э.И. Нелинейное деформирование трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем / Э.И. Старовойтов, Ю.В. Захарчук // Механика машин, механизмов и материалов. — 2019. — № 3(48). — С. 26–33.
30. Зеленая, А.С. Напряженно-деформированное состояние упругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым наполнителем / А.С. Зеленая // Механика. Исследования и инновации. — 2017. — Вып. 10. — С. 67–74.

31. Тимошенко, С.П. Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. — М.: Наука, 1966. — 636 с.
32. Босаков, С.В. Расчет конструкций на упругом основании методом Ритца. Часть 1. Основание Винклера / С.В. Босаков // Вестн. НИЦ «Строительство». — 2012. — № 5. — С. 38–46.
33. Босаков, С.В. К решению контактной задачи для круглой пластинки / С.В. Босаков // Прикладная математика и механика. — 2008. — Т. 72, № 1. — С. 99–102.
34. Нестерович, А.В. Напряженное состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости / А.В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации. — 2019. — Вып. 12. — С. 152–157.
35. Нестерович, А.В. Уравнения равновесия трехслойной круговой пластины при неосесимметричном нагружении / А.В. Нестерович // Теоретич. и прикладная механика. — 2019. — Вып. 34. — С. 154–159.
36. Нестерович, А.В. Напряжения в круговой пластине типа Тимошенко при неосесимметричном растяжении-сжатии / А.В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации. — 2018. — Вып. 11. — С. 195–203.

STAROVOITOV Eduard I., D. Sc. in Phys. and Math., Prof.

Head of the Department “Structural Mechanics”¹

E-mail: edstar0@yandex.by

NESTSIAROVICH Alina V., M. Sc. in Eng.

Post-Graduate Student of the Department “Structural Mechanics”¹

E-mail: alina_nest92@bk.ru

¹Belarusian State University of Transport, Gomel, Republic of Belarus

Received 02 December 2020.

NON-AXISYMMETRIC DEFORMATION OF A CIRCULAR THREE-LAYER PLATE IN ITS OWN PLANE

A statement is given for the boundary value problem of non-axisymmetric deformation of an elastic three-layer circular plate in its own plane. The plate contour is pinched. Physical equations of state in the plate layers are described using the linear theory of elasticity, taking into account temperature influence on the elastic characteristics of materials. Equilibrium equations are obtained by the Lagrange variational method. Boundary conditions on the plate contour are formulated. The solution of the boundary value problem is reduced to finding the radial and tangential displacements in the layers of the plate. These displacements satisfy an inhomogeneous system of ordinary linear differential equations. To solve it, the method of decomposition into trigonometric Fourier series is applied. After substituting the series into the original system of equilibrium equations and performing the corresponding transformations, a system of ordinary linear differential equations is obtained to determine the four radial functions in each term of the series. The analytical solution is written out in the final form in the case of cosine radial and sinusoidal circumferential loads that depend linearly on the radial coordinate. The load is applied in the middle plane of the filler. Numerical approbation of the solution is carried out. The dependence of radial and tangential displacements on polar coordinates and temperature is investigated. Graphs of changes in displacements along the radius of the plate for different values of the angular coordinate are given. The weak dependence of displacements on temperature is illustrated when the plate contour is fixed.

Keywords: three-layer circular plate, elasticity, non-axisymmetric load, displacements, numerical results

DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2021-1-54-38-45>

References

1. Golovko K.G., Lugovoy P.Z., Meysh V.F. *Dinamika neodnorodnykh obolochek pri nestatsionarnykh nagruzkakh* [Dynamics of inhomogeneous shells under transient load conditions]. Kiev, Kievskiy universitet Publ., 2012. 541 p. (in Russ.).
2. Aghalovyan L. *Asymptotic theory of anisotropic plates and shells*. Singapore, London, World Scientific Publishing, 2015. 376 p.
3. Zhuravkov M.A., Starovoitov E.I. *Mekhanika sploshnykh sred. Teoriya uprugosti i plastichnosti* [Continuum mechanics. The theory of elasticity and plasticity]. Minsk, Belorusskiy gosudarstvennyy universitet Publ., 2011. 543 p. (in Russ.).
4. Starovoitov E.I., Zhuravkov M.A., Leonenko D.V. *Trekhsloynnye sterzhni v termoradiatsionnykh polyakh* [Three-layer bars in thermoradiation fields]. Minsk, Belaruskaya navuka Publ., 2017. 275 p. (in Russ.).
5. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Pleskatshevsky Yu.M. *Kolebaniya trekhsloynnykh tsilindricheskikh obolochek v uprugoy srede Vinklera pri rezonanse* [Vibrations of the three-layered cylindrical shells in the elastic Winkler’s medium at resonance]. *Mechanics of machines, mechanisms and materials*, 2013, no. 4(25), pp. 70–73 (in Russ.).
6. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Tarlakovskiy D.V. *Deformirovanie trekhsloynnoy krugovoy tsilindricheskoy obolochki v temperaturnom pole* [Deformation of three-layer circular cylindrical shell in the thermal field]. *Engineering and automation problems*, 2016, no. 1, pp. 91–97 (in Russ.).

7. Ivañez I., Moure M.M., Garcia-Castillo S.K., Sanchez-Saez S. The oblique impact response of composite sandwich plates. *Composite structures*, 2015, no. 133, pp. 1127–1136.
8. Paimushin V.N., Ivanov V.I., Khusainov V.R. Analiz svobodnykh i sobstvennykh kolebaniy trekhsloynoy plastiny na osnove uravneniy utochnennoy teorii [Study of free and eigen vibrations of a three-layer plate on the bases of equations of a refined theory]. *Mechanics of composite materials and structures*, 2002, vol. 8, no. 4, pp. 543–554 (in Russ.).
9. Grover N., Singh B.N., Maiti D.K. An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates. *Aerospace science and technology*, 2016, no. 52, pp. 41–51.
10. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Tarlakovsky D.V. Rezonansnye kolebaniya krugovykh kompozitnykh plastin na uprugom osnovanii [Resonance vibrations of circular composite plates on an elastic foundation]. *Mekhanika kompozitnykh materialov*, 2015, vol. 51, no. 5, pp. 793–806 (in Russ.).
11. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Kolebaniya krugovykh kompozitnykh plastin na uprugom osnovanii pod deystviem lokalnykh nagruzok [Vibrations of circular composite plates on an elastic foundation under the action of local loads]. *Mekhanika kompozitnykh materialov*, 2016, vol. 52, no. 5, pp. 943–954 (in Russ.).
12. Vasilevich Yu.V., Neumerzhitskiy V.V. Metod rascheta effektivnosti vibroizolyatsii odnosloynogo i mnogoslloynogo ograzhdeniy v tverдой uprugoy srede [Calculating method of vibrating insulation efficiency of single and multi-layer enclosures in solid elastic medium]. *Mechanics of machines, mechanisms and materials*, 2009, no. 1(6), pp. 56–58 (in Russ.).
13. Dzhagangirov A.A. Nesushchaya sposobnost trekhsloynoy voloknistoy kompozitnoy koltsevoy plastinki, zashchemlennoy po kromkam [Carrying capacity of a three-layer fibrous composite annular plate, clamped along the edges]. *Mekhanika kompozitnykh materialov*, 2016, vol. 52, no. 2, pp. 385–398 (in Russ.).
14. Chigarev A.V., Borisov A.V. Issledovanie modeley mnogoslloynnykh kostey cheloveka na prochnost pri nagruzhenii [Strength models of multilayer human bones by loading]. *Mechanics of machines, mechanisms and materials*, 2009, no. 1(6), pp. 85–87 (in Russ.).
15. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Deformirovanie trekhsloynogo sterzhnya v temperaturnom pole [Deformation of three-layer beam in a temperature field]. *Mechanics of machines, mechanisms and materials*, 2013, no. 1(22), pp. 31–35 (in Russ.).
16. Moskvitin V.V., Starovoitov E.I. Deformatsiya i peremennye nagruzheniya dvukhsloynnykh metalopolimernykh plastin [Deformation and variable loading of two-layer metal-polymer plates]. *Mekhanika kompozitnykh materialov*, 1985, no. 3, pp. 409–416 (in Russ.).
17. Škec L., Jelenić G. Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection. *Acta mechanica*, 2014, vol. 225, no. 2, pp. 523–541.
18. Belinha J., Dints L.M.J.S. Nonlinear analysis of plates and laminates using the element free Galerkin method. *Composite structures*, 2007, vol. 78, no. 3, pp. 337–350.
19. Yang L., Harrysson O., West H., Cormier D. A Comparison of Bending Properties for Cellular Core Sandwich Panels. *Materials sciences and applications*, 2013, vol. 4, no. 8, pp. 471–477.
20. Lee C.R., Sun S.J., Kam T.Y. System parameters evaluation of flexibly supported laminated composite sandwich plates. *AIAA journal*, 2007, vol. 45, no. 9, pp. 2312–2322.
21. Thai C.H., Tran L.V., Tran D.T., Nguyen-Thoi T., Nguyen-Xuan U. Analysis of laminated composite plates using higher order shear deformation plate theory and mode-based smoother discrete shear gap method. *Applied mathematical modelling*, 2012, vol. 36, no. 11, pp. 5657–5677.
22. Zenkour A.M., Alghamdi N.A. Thermomechanical bending response of functionally graded nonsymmetric sandwich plates. *Journal of sandwich structures and materials*, 2010, vol. 12, no. 1, pp. 7–46.
23. Zenkour A.M., Alghamdi N.A. Bending analysis of functionally graded sandwich plates under the effect of mechanical and thermal loads. *Mechanics of advanced materials and structures*, 2010, vol. 17, no. 6, pp. 419–432.
24. Dalot J., Sab K. Limit analysis of multi-layered plates. Part I: The homogenized Love–Kirchhoff model. *Journal of the mechanics and physics of solids*, 2008, vol. 56, no. 2, pp. 561–580.
25. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Termouprugoe deformirovanie trekhsloynoy krugloy plastiny poverkhnostnymi nagruzkami razlichnykh form [Thermoelastic deformation of three-layer circular plate by a surface loads of various forms]. *Mekhanika kompozitnykh materialov*, 2018, no. 1(42), pp. 81–88 (in Russ.).
26. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Suleyman M. Deformirovanie lokalnymi nagruzkami kompozitnoy plastiny na uprugom osnovanii [Deformation of a composite plate on an elastic foundation by local loads]. *Mekhanika kompozitnykh materialov*, 2007, vol. 43, no. 1, pp. 109–120 (in Russ.).
27. Kozel A.G. Uravneniya ravovesiya uprugoplasticheskoy krugovoy plastiny na osnovanii Pasternaka [Equilibrium equations for an elastoplastic circular plate based on Pasternak]. *Mechanics. Researches and Innovations*, 2018, iss. 11, pp. 127–133 (in Russ.).
28. Zakharchuk Yu.V. Deformirovanie krugovoy trekhsloynoy plastiny so szhimaemym zapolnitelem [Deformation of the circular three-layer plate with a compressible filler]. *Problems of physics, mathematics and technics*, 2017, vol. 33, no. 4, pp. 53–57 (in Russ.).
29. Starovoitov E.I., Zakharchuk Yu.V. Nelineynoe deformirovanie trekhsloynoy plastiny so szhimaemym zapolnitelem [Nonlinear deformation of circular sandwich plates with compressible filler]. *Mechanics of machines, mechanisms and materials*, 2019, no. 3(48), pp. 26–33 (in Russ.).
30. Zelenaya A.S. Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie uprugoy trekhsloynoy pryamougolnoy plastiny so szhimaemym zapolnitelem [Stress-strain state of the elastic three-layer plate with the compressible filler]. *Mechanics. Researches and Innovations*, 2017, iss. 10, pp. 67–74 (in Russ.).
31. Timoshenko S.P., Voynorovskiy-Kruger S. *Plastinki i obo-lochki* [Plates and shells]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 636 p. (in Russ.).
32. Bosakov S.V. Raschet konstruksiy na uprugom osnovanii metodom Rittsa. Chast 1. Osnovanie Vinklera [Calculation of structures on an elastic foundation by the Ritz method. Part 1. Winkler foundation]. *Bulletin of Science and Research Center "Stroitelstvo"*, 2012, no. 5, pp. 38–53 (in Russ.).
33. Bosakov S.V. K resheniyu kontaktnoy zadachi dlya krugloy plastinki [To the solution of the contact problem for a circular plate]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2008, vol. 72, no. 1, pp. 99–102 (in Russ.).
34. Nestsiarovich A.V. Napryazhennoe sostoyanie krugovoy trekhsloynoy plastiny pri osesimmetrichnom nagruzhenii v svoey ploskosti [Stressed state of a circular three-layer plate under axisymmetric loading in its plane]. *Mechanics. Researches and Innovations*, 2019, iss. 12, pp. 152–157 (in Russ.).
35. Nestsiarovich A.V. Uravneniya ravovesiya trekhsloynoy krugovoy plastiny pri neosesimmetrichnom nagruzhenii [Equilibrium equations for a three-layer circular plate under non-axisymmetric loading]. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika*, 2019, iss. 34, pp. 154–159 (in Russ.).
36. Nestsiarovich A.V. Napryazheniya v krugovoy plastine tipa Timoshenko pri neosesimmetrichnom rastyazhenii-szhatii [Stresses in a Timoshenko-type circular plate under nonaxisymmetric tension-compression]. *Mechanics. Researches and Innovations*, 2018, iss. 11, pp. 195–203 (in Russ.).