

# МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.3

Д.В. ЛЕОНЕНКО, д-р физ.-мат. наук, проф.  
профессор кафедры «Строительная механика»<sup>1</sup>  
E-mail: leoden@tut.by

М.В. МАРКОВА  
аспирант кафедры «Строительная механика»<sup>1</sup>  
E-mail: 1987marinamarkova@gmail.com

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Республика Беларусь

Поступила в редакцию 01.06.2022.

## КОЛЕБАНИЯ КРУГОВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ СТУПЕНЧАТОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ УДАРНОМ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

*Рассмотрены вынужденные колебания круговой трехслойной пластины, имеющей ступенчатое изменение толщины наружных слоев. Деформирование пластины описывается с помощью гипотезы ломаной линии: в тонких внешних слоях справедливы классические гипотезы Кирхгофа, а в относительно толстом срединном заполнителе выполняется гипотеза Тимошенко о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали. Уравнения движения получены из вариационного принципа Гамильтона. Рассмотрен частный случай внешнего воздействия: периодическая последовательность ударов равной интенсивности. Задача сведена к нахождению трех искомых функций: прогиба пластины, сдвига и радиального перемещения срединной плоскости заполнителя. Решение представлено в виде суммы квазистатических и динамических составляющих искомых перемещений. Приведены численные результаты полученного решения и выполнен анализ влияния ударной нагрузки на характер колебаний пластины.*

**Ключевые слова:** круговая трехслойная пластина, пластина ступенчато-переменной толщины, вынужденные колебания, периодические удары

DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2022-3-60-68-76>

**Введение.** Основной целью конструирования является поиск решений, оптимальных с экономической, функциональной и эстетической точки зрения. В связи с этим трехслойные элементы конструкций занимают одну из лидирующих позиций среди наиболее оптимальных вариантов. Это обусловлено выгодным сочетанием в них физико-механических свойств различных материалов, объединенных в единый пакет. Кроме того, проектируя трехслойные элементы с точным изменением толщины отдельных составных частей можно обеспечить ту же несущую способность при изгибе с заметным уменьшением веса по сравнению с аналогами, имеющими постоянную вдоль сечения толщину.

Функциональное изменение толщины могут иметь как внешние обшивки трехслойного элемента, так и разделяющий их срединный заполнитель. Так, в работах [1, 2] представлен способ улучшения несущей способности прямоугольной в плане сэндвич-пластины путем ступенчатого изменения толщины внешних несущих обшивок с утолщением в критических областях конструкции. В исследовании было продемонстрировано, что прочность и жесткость сэндвич-пластины может быть повышена без существенного изменения веса. В работах [3–7] представлены исследования колебаний круглых трехслойных пластин, в которых внешние тонкие слои имеют постоянную

толщину, а толщина срединного заполнителя меняется в радиальном направлении линейно [3, 4], параболически [5, 6], экспоненциально [7]. В [8] приводятся теоретические и численные исследования динамического поведения конической сэндвич-пластины. Предполагается, что элемент имеет как коническую сердцевину, так и конические внешние слои. В [9] исследуется потеря устойчивости, а в [10] — колебания круговой трехслойной пластины с коническим заполнителем и внешними слоями, имеющими постоянную толщину.

Использование трехслойных элементов не является новой тенденцией в сфере конструирования, однако с развитием технологий и постоянным появлением новых материалов применение трехслойных пакетов с каждым годом распространяется все в больших сферах строительства и производства.

Исследованию трехслойных элементов уже посвящено немало работ. Среди основных принципов моделирования деформирования трехслойных пакетов можно выделить два основных направления: модель, основанная на привлечении единой гипотезы ко всему пакету слоев в целом (непрерывно-структурная), и модель, основанная на принятии отдельных послойных гипотез (дискретно-структурная). Наиболее ранняя непрерывно-структурная модель базировалась на гипотезе Кирхгофа [11]. Позднее появилась уточненная модель, основанная на сдвиговой теории Тимошенко [12]. Среди дискретно-структурных моделей следует выделить два подхода. Первый получил развитие в работах Болотина В.В. и Новичкова Ю.Н. [13–15]. Он основывался на привлечении к внешним несущим слоям гипотезы Кирхгофа, а в относительно мягком срединном заполнителе учитывались деформации поперечных сдвигов. Во втором подходе, предложенном Григолюком Э.И. и Чулковым П.П., гипотеза Тимошенко применялась к каждому слою пакета [16, 17].

Рассмотрим детальнее круговую трехслойную пластину, имеющую вдоль радиуса ступенчатое изменение толщины. Статическое деформирование подобного ряда пластины со ступенчатым изменением толщины наружных слоев рассмотрено в работах [18–22]. В работах Д.А. Шляхина [23, 24] рассматривается задача о вынужденных колебаниях круговой биморфной пластины ступенчато-переменной толщины и жесткости. Пластина образована сопряжением трех плоских круговых элементов: металлической подложки и наклеенных на нее пьезоэлектрических элементов меньшего диаметра. В [25] приводится вывод уравнений движения для круглой трехслойной пластины со сквозным жестким сердечником, сосредоточенным в центре. За счет толщины сердечника общая конфигурация пластины имеет ступенчато-переменный контур, а материал срединного заполнителя распределен по кольцу.

В последние годы значительное внимание научного сообщества привлек новый тип композитных материалов, известный как функционально-градиентные (FGM). Особенность данных материалов заключается в плавном переходе одного материала в другой, что обуславливает непрерывное изменение свойств по толщине элемента. Функционально-градиентные материалы исключают основную проблему многослойных композитов и структур — расслоение.

В работе [26] представлено аналитическое решение для свободных колебаний круговой пластины, состоящей из  $n$  ступеней, в которой свойства непрерывно изменяются по толщине со ступенчатым распределением объемных долей двух материалов. В [27] рассматривается изгиб круговой FG-пластины ступенчато-переменной толщины. Здесь ступени пластины разделены на несколько сегментов постоянной толщины. Механические свойства каждого сегмента могут отличаться. Кроме того, вариации характеристик каждого сегмента могут быть определены индивидуально.

В данной статье будут рассмотрены аспекты динамического деформирования трехслойной круговой пластины со ступенчатым изменением толщины наружных слоев пакета.

**Постановка задачи.** Рассмотрим вынужденные колебания круговой трехслойной пластины, имеющей ступенчатое изменение толщины внешних слоев вдоль радиуса (рисунок 1).

Пластина воспринимает действие внешней периодически повторяющейся ударной равномерно распределенной нагрузки  $q(t)$  (рисунок 2). Интенсивность удара в каждом цикле загрузки имеет постоянное значение. Функцию внешней нагрузки для каждого участка пластины при этом можно представить в виде:

$$q_{(I,II)}(t) = q_{0(I,II)} \left( H_0(\tau_q - t) + \sum_{m=1}^{N-1} \left[ H_0(m\tau + \tau_q - t) - H_0(m\tau - t) \right] \right),$$

где I, II — номера участков ступенчатой пластины;  $\tau_q$  — время действия внешней ударной нагрузки;  $\tau$  — длительность цикла загрузки, представляющая собой сумму времени действия внешней нагрузки и времени свободных колебаний пластины до восприятия следующего воздействия;  $m$  — номер цикла;  $N$  — количество ударов;  $H_0(t)$  — функция Хевисайда [28].

Пакет представляет собой монолитную структуру, проскальзывание между слоями отсутствует. Постановка задачи выполняется в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ , привязанной к срединной плоскости заполнителя пластины. Заполнитель имеет относительно большую толщину  $h_3$  по сравнению с толщиной тонких внешних слоев пластины ( $h_1$  и  $h_2$ ), выполненных из прочного и жесткого материала. Функциональность запол-

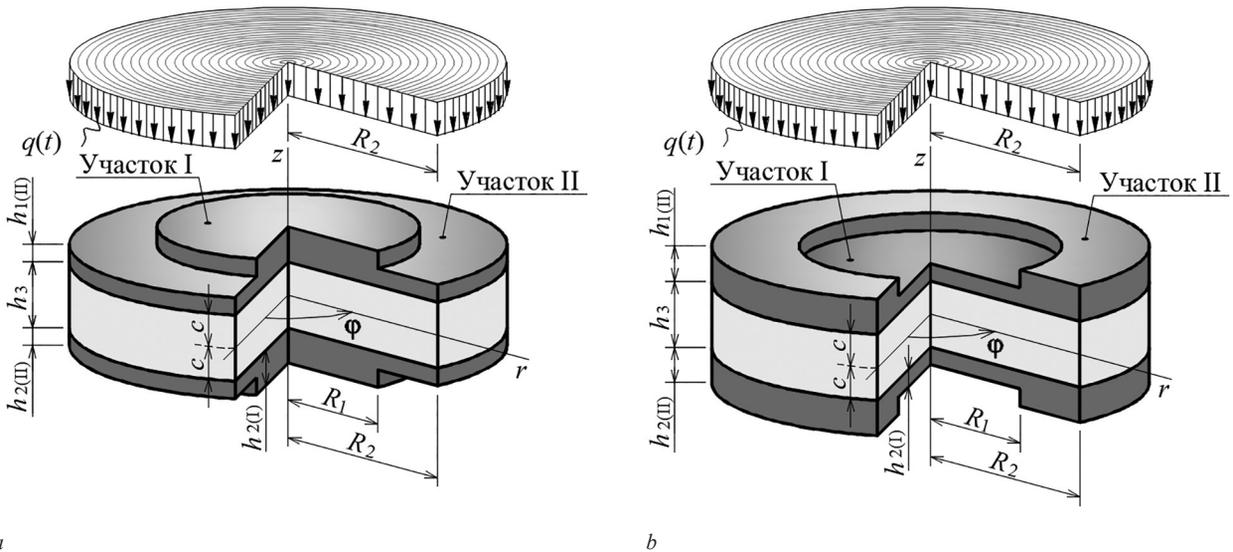


Рисунок 1 — Круговая трехслойная ступенчатая пластина: *a* — с уширением в центральной части; *b* — с сужением в центральной части

Figure 1 — Circular three-layer step plate: *a* — with widening in the center; *b* — with narrowing in the center

нителя заключается в перераспределении усилий между внешними слоями и наделении элемента в целом определенными физическими характеристиками.

Деформирование пластины подчиняется гипотезе ломаной линии: к внешним тонким несущим слоям привлекаются классические гипотезы Кирхгофа, а в толстом срединном заполнителе учитываются сдвиговые деформации [29–31].

Опираясь на вариационный принцип Гамильтона [32, 33], в работе [34] была получена система дифференциальных уравнений колебаний круговой трехслойной пластины переменной толщины. Участки рассматриваемой ступенчатой пластины имеют постоянную толщину всех слоев ( $h_1 = \text{const}$ ,  $h_2 = \text{const}$ ,  $h_3 = \text{const}$ ), поэтому полученная в работе [34] система применительно к каждому участку преобразуется к виду:

$$\Delta \Delta w_{(I,II)} + D_{(I,II)} m_{(I,II)} \Delta \dot{w}_{(I,II)} + D_{(I,II)} M_{1(I,II)} \ddot{w}_{(I,II)} = D_{(I,II)} q_{(I,II)};$$

$$u_{(I,II)} = b_{1(I,II)} w_{(I,II),r} + r C_{1(I,II)} + \frac{C_{2(I,II)}}{r} - \frac{m_{1(I,II)}}{r} \int r \dot{w}_{(I,II)} dr;$$

$$\Psi_{(I,II)} = b_{2(I,II)} w_{(I,II),r} + r C_{3(I,II)} + \frac{C_{4(I,II)}}{r} - \frac{m_{2(I,II)}}{r} \int r \dot{w}_{(I,II)} dr,$$

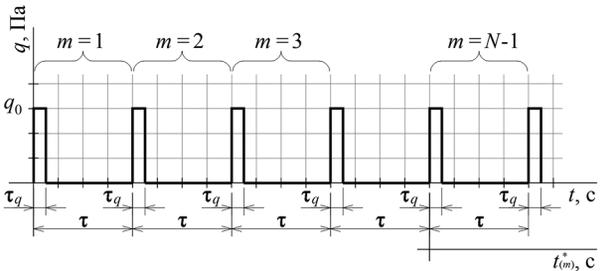


Рисунок 2 — Внешнее воздействие в виде периодической последовательности ударов равной интенсивности  
Figure 2 — External impact in the form of a periodic sequence of strokes of equal intensity

где  $w, u, \psi$  — прогиб, радиальное перемещение координатной поверхности и относительный сдвиг в заполнителе соответственно;  $\Delta$  — оператор Лапласа;  $D, b_i, m_i$  и  $M_1$  — коэффициенты, зависящие от плотности, упругих свойств материалов и толщины слоев пластины;  $C_n$  — константы интегрирования, определяемые из граничных условий закрепления пластины.

Граничные условия для системы (1) формируются исходя из способа опирания внешнего контура пластины. Так, при жесткой заделке края пластины в точке  $r = R_2$  будут отсутствовать какие-либо перемещения, т. е.

$$w_{(II)} = 0; \quad \Psi_{(II)} = 0; \quad w_{(II),r} = 0; \quad w_{,r(II)} = 0, \quad (2)$$

где  $w_{,r}$  — угол поворота нормали пластины.

Для рассматриваемой пластины кроме граничных условий (2) должны быть удовлетворены условия ограниченности перемещений и усилий ( $u_{(I)}, w_{(I)}, \Psi_{(I)}, Q_{(I)}$ ) в начале координат при  $r = 0$  и условия равенства перемещений и интегральных внутренних усилий в точках изменения толщины при  $r = R_2$  [35–37]:

$$u_{(I)} = u_{(II)}; \quad \Psi_{(I)} = \Psi_{(II)}; \quad w_{(I)} = w_{(II)}; \quad w_{,r(I)} = w_{,r(II)};$$

$$T_{r(I)} = T_{r(II)}; \quad M_{r(I)} = M_{r(II)}; \quad H_{r(I)} = H_{r(II)}; \quad Q_{(I)} = Q_{(II)}, \quad (3)$$

где  $T_r, M_r, H_r, Q$  — обобщенные внутренние усилия, возникающие в пакете. Выражения для определения внутренних усилий представлены в работе [34].

Общее решение для перемещений, возникающих в ступенчатой пластине, может быть представлено с помощью функции Хевисайда:

$$w = w_{(I)} + (w_{(II)} - w_{(I)}) \cdot H_0(r - R_1);$$

$$u = u_{(I)} + (u_{(II)} - u_{(I)}) \cdot H_0(r - R_1);$$

$$\Psi = \Psi_{(I)} + (\Psi_{(II)} - \Psi_{(I)}) \cdot H_0(r - R_1).$$

**Построение решения.** Решение для системы (1) представим в виде суммы квазистатических ( $w_s, u_s, \Psi_s$ ) и динамических ( $w_d, u_d, \Psi_d$ ) составляющих перемещений [38]:

$$\begin{aligned} w_{(I,II)} &= w_{s(I,II)} + w_{d(I,II)}; \\ u_{(I,II)} &= u_{s(I,II)} + u_{d(I,II)}; \\ \Psi_{(I,II)} &= \Psi_{s(I,II)} + \Psi_{d(I,II)}. \end{aligned} \quad (4)$$

В этом случае система уравнений, описывающая квазистатическое деформирование пластины, будет получена из системы (1) путем обнуления инерционных слагаемых:

$$\begin{aligned} \Delta \Delta w_{s(I,II)} &= D_{(I,II)} q_{(I,II)}; \\ u_{s(I,II)} &= b_{1(I,II)} w_{s(I,II),r} + r C_{s1(I,II)} + \frac{C_{s2(I,II)}}{r}; \\ \Psi_{s(I,II)} &= b_{2(I,II)} w_{s(I,II),r} + r C_{s3(I,II)} + \frac{C_{s4(I,II)}}{r}. \end{aligned} \quad (5)$$

Решение системы (5) может быть получено путем четырехкратного интегрирования первого выражения с последующей подстановкой полученного результата в последние два уравнения:

$$\begin{aligned} w_{s(I,II)} &= C_{s5(I,II)} + C_{s6(I,II)} r^2 + C_{s7(II)} \ln r + \\ &+ C_{s8(II)} r^2 \ln r + D_{(I,II)} \int \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int (r q_{(I,II)}) dr dr dr dr; \\ u_{s(I,II)} &= C_{s1(I,II)} r + \frac{C_{s2(II)}}{r} + 2 C_{s6(I,II)} b_{1(I,II)} r + C_{s7(II)} \frac{b_{1(II)}}{r} + \\ &+ C_{s8(II)} b_{1(II)} r (2 \ln r + 1) + \frac{D_{(I,II)} b_{1(I,II)}}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int (r q_{(I,II)}) dr dr dr; \\ \Psi_{s(I,II)} &= C_{s3(I,II)} r + \frac{C_{s4(II)}}{r} + 2 C_{s6(I,II)} b_{2(I,II)} r + C_{s7(II)} \frac{b_{2(II)}}{r} + \\ &+ C_{s8(II)} b_{2(II)} r (2 \ln r + 1) + \frac{D_{(I,II)} b_{2(I,II)}}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int (r q_{(I,II)}) dr dr dr, \end{aligned}$$

где  $C_{sn}$  — константы интегрирования квазистатического деформирования, определяемые из граничных условий (2) и (3). Для центрального участка I константы интегрирования  $C_{s2}, C_{s4}, C_{s7}, C_{s8}$  должны быть равны нулю ( $C_{s2(I)} = C_{s4(I)} = C_{s7(I)} = C_{s8(I)} = 0$ ) ввиду ограниченности искомого решения в начале координат.

Прикладываемое к пластине внешнее воздействие  $q(t)$  представляет собой совокупность временных участков, на каждом из которых  $q(t)$  имеет линейный характер. Поэтому для рассматриваемой ударной нагрузки  $\dot{w}_{s(I,II)} = 0$ . С учетом данного утверждения и выражений (4), система (1) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} \Delta \Delta w_{d(I,II)} + D_{(I,II)} m_{(I,II)} \Delta \dot{w}_{d(I,II)} + D_{(I,II)} M_{1(I,II)} \ddot{w}_{d(I,II)} &= \\ = D_{(I,II)} q_{(I,II)} - \Delta \Delta w_{s(I,II)}; \\ u_{s(I,II)} + u_{d(I,II)} &= b_{1(I,II)} (w_{s(I,II),r} + w_{d(I,II),r}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + r C_{1(I,II)} + \frac{C_{2(I,II)}}{r} - \frac{m_{1(I,II)}}{r} \int r \dot{w}_{d(I,II)} dr; \\ \Psi_{s(I,II)} + \Psi_{d(I,II)} &= b_{2(I,II)} (w_{s(I,II),r} + w_{d(I,II),r}) + \\ + r C_{3(I,II)} + \frac{C_{4(I,II)}}{r} - \frac{m_{2(I,II)}}{r} \int r \dot{w}_{d(I,II)} dr. \end{aligned}$$

Учитывая (5), система может быть переписана в виде:

$$\begin{aligned} \Delta \Delta w_{d(I,II)} + D_{(I,II)} m_{(I,II)} \Delta \dot{w}_{d(I,II)} + D_{(I,II)} M_{1(I,II)} \ddot{w}_{d(I,II)} &= 0; \\ u_{d(I,II)} &= b_{1(I,II)} w_{d(I,II),r} + r C_{d1(I,II)} + \\ &+ \frac{C_{d2(I,II)}}{r} - \frac{m_{1(I,II)}}{r} \int r \dot{w}_{d(I,II)} dr; \\ \Psi_{d(I,II)} &= b_{2(I,II)} w_{d(I,II),r} + r C_{d3(I,II)} + \\ &+ \frac{C_{d4(I,II)}}{r} - \frac{m_{2(I,II)}}{r} \int r \dot{w}_{d(I,II)} dr. \end{aligned} \quad (7)$$

Полученная система (7) соответствует свободным колебаниям пластины и служит для определения динамических составляющих перемещений.

Используя метод Фурье [39], в работе [40] представлено решение системы (7) путем разложения в ряд:

$$\begin{aligned} w_{d(I,II)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ C_{d5n(I,II)} I_0(r \gamma_{(I,II)n}^+) + C_{d6n(II)} K_0(r \gamma_{(II)n}^+) + \right. \\ &+ C_{d7n(I,II)} J_0(r \gamma_{(I,II)n}^-) + C_{d8n(II)} Y_0(r \gamma_{(II)n}^-) \left. \right] \times \\ &\times (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)); \\ u_{d(I,II)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ C_{d1n(I,II)} r + \frac{C_{d2n(II)}}{r} + C_{d5n(I,II)} I_1(r \gamma_{(I,II)n}^+) \times \right. \\ &\times \left( \gamma_{(I,II)n}^+ b_{1(I,II)} + \frac{\omega_n^2 m_{1(I,II)}}{\gamma_{(I,II)n}^+} \right) - C_{d6n(II)} K_1(r \gamma_{(II)n}^+) \times \\ &\times \left( \gamma_{(II)n}^+ b_{1(II)} + \frac{\omega_n^2 m_{1(II)}}{\gamma_{(II)n}^+} \right) - C_{d7n(I,II)} J_1(r \gamma_{(I,II)n}^-) \times \\ &\times \left( \gamma_{(I,II)n}^- b_{1(I,II)} - \frac{\omega_n^2 m_{1(I,II)}}{\gamma_{(I,II)n}^-} \right) - C_{d8n(II)} Y_1(r \gamma_{(II)n}^-) \times \\ &\times \left( \gamma_{(II)n}^- b_{1(II)} - \frac{\omega_n^2 m_{1(II)}}{\gamma_{(II)n}^-} \right) \left. \right] \times (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)); \\ \Psi_{d(I,II)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ C_{d3n(I,II)} r + \frac{C_{d4n(II)}}{r} + C_{d5n(I,II)} I_1(r \gamma_{(I,II)n}^+) \times \right. \\ &\times \left( \gamma_{(I,II)n}^+ b_{2(I,II)} + \frac{\omega_n^2 m_{2(I,II)}}{\gamma_{(I,II)n}^+} \right) - C_{d6n(II)} K_1(r \gamma_{(II)n}^+) \times \\ &\times \left( \gamma_{(II)n}^+ b_{2(II)} + \frac{\omega_n^2 m_{2(II)}}{\gamma_{(II)n}^+} \right) - C_{d7n(I,II)} J_1(r \gamma_{(I,II)n}^-) \times \\ &\times \left( \gamma_{(I,II)n}^- b_{2(I,II)} - \frac{\omega_n^2 m_{2(I,II)}}{\gamma_{(I,II)n}^-} \right) - C_{d8n(II)} Y_1(r \gamma_{(II)n}^-) \times \\ &\times \left( \gamma_{(II)n}^- b_{2(II)} - \frac{\omega_n^2 m_{2(II)}}{\gamma_{(II)n}^-} \right) \left. \right] \times (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)); \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \times \left( \gamma_{(I,II)n}^- b_{2(I,II)} - \frac{\omega_n^2 m_{2(I,II)}}{\gamma_{(I,II)n}^-} \right) - C_{d8n(II)} Y_1 \left( r \gamma_{(II)n}^- \right) \times \\ & \times \left( \gamma_{(II)n}^- b_{2(II)} - \frac{\omega_n^2 m_{2(II)}}{\gamma_{(II)n}^-} \right) \left[ A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) \right], \end{aligned}$$

где  $\gamma_n^\pm$  — коэффициенты, зависящие от частоты собственных колебаний пластины  $\omega_n$ ;  $I_0(r\gamma_n^+)$ ,  $K_0(r\gamma_n^+)$ ,  $J_0(r\gamma_n^-)$ ,  $Y_0(r\gamma_n^-)$  — функции Бесселя от действительного и мнимого аргумента [41, 42];  $C_{dn}$  — константы интегрирования, определяемые из граничных условий (2) и (3);  $A_n$  и  $B_n$  — константы, определяемые из начальных условий колебаний пластины.

В приведенных выражениях перемещений для участка I, как и в случае квазистатического деформирования, константы интегрирования  $C_{d2n}$ ,  $C_{d4n}$ ,  $C_{d6n}$ ,  $C_{d8n}$  положим равными нулю ( $C_{d2n(1)} = C_{d4n(1)} = C_{d6n(1)} = C_{d8n(1)} = 0$ ) в связи с ограниченностью решений в начале координат.

Рассмотрим по отдельности каждый цикл внешнего воздействия продолжительностью  $\tau$ . Один  $m$ -цикл состоит из двух временных участков. На первом временном участке, продолжительностью  $\tau_q$ , пластина испытывает внешнее воздействие  $q$ , и прогиб пластины при колебании определяется суммой квазистатической и динамической составляющих:  $w_{(m)}^q = w_s^q + w_{d(m)}^q$ . Второй временной участок  $m$ -го цикла отсчитывается от момента завершения воздействия  $q$  и представляет собой свободные колебания пластины, начальными условиями для которых служат функции прогиба и скорости движения точек пластины при вынужденных колебаниях предыдущего временного участка в момент времени  $t = \tau_q$ . Прогиб пластины на втором временном участке определяется лишь динамической составляющей:  $w_{(m)}^0 = w_{d(m)}^0$ .

До начала внешнего воздействия колебания в рассматриваемой пластине отсутствовали. Поэтому временные константы интегрирования для каждого участка первого цикла могут быть определены из условий:

$$\begin{aligned} w_{(1)}^q(r, 0) &= w_s(r, 0) + w_{d(1)}^q(r, 0) = 0; \\ w_{d(1)}^q(r, 0) &= -w_s(r, 0); \\ w_{d(1)}^0(r, 0) &= w_s(r, \tau_q) + w_{d(1)}^q(r, \tau_q); \\ \dot{w}_{(1)}^q(r, 0) &= \dot{w}_s(r, 0) + \dot{w}_{d(1)}^q(r, 0) = 0; \\ \dot{w}_{d(1)}^q(r, 0) &= -\dot{w}_s(r, 0); \\ \dot{w}_{d(1)}^0(r, 0) &= \dot{w}_s(r, \tau_q) + \dot{w}_{d(1)}^q(r, \tau_q). \end{aligned} \quad (9)$$

Примем, что каждый цикл внешнего воздействия на пластину имеет собственную локальную координатную ось времени  $t_{(m)}^*$  (см. рисунок 2). Взаимосвязь между основной координатной осью  $t$

и локальными  $t_{(m)}^*$  можно представить следующим выражением:

$$t_{(m)}^* = t - (m - 1)\tau.$$

Тогда выражение для функции прогиба  $m$ -го цикла внешнего воздействия будет иметь вид:

$$\begin{aligned} w_{(m)}(r, t) &= w_s(r, t) + w_{d(m)}^q(r, [t - (m - 1)\tau]) + \\ &+ \left( w_{d(m)}^0(r, [t - (m - 1)\tau - \tau_q]) - w_s(r, t) - \right. \\ &\left. - w_{d(m)}^q(r, [t - (m - 1)\tau]) \right) \cdot H_0(t - (m - 1)\tau - \tau_q). \end{aligned}$$

Временные константы интегрирования для второго и всех последующих циклов могут быть определены из следующих начальных условий:

$$\begin{aligned} w_{d(m)}^q(r, 0) &= -w_s(r, [m - 1]\tau) + w_{d(m-1)}^0(r, [\tau - \tau_q]); \\ \dot{w}_{d(m)}^q(r, 0) &= -\dot{w}_s(r, [m - 1]\tau) + \dot{w}_{d(m-1)}^0(r, [\tau - \tau_q]); \\ w_{d(m)}^0(r, 0) &= w_s(r, [m - 1]\tau + \tau_q) + w_{d(m)}^q(r, \tau_q); \\ \dot{w}_{d(m)}^0(r, 0) &= \dot{w}_s(r, [m - 1]\tau + \tau_q) + \dot{w}_{d(m)}^q(r, \tau_q). \end{aligned} \quad (10)$$

Итоговое выражение для прогиба пластины под действием периодической ударной нагрузки с учетом решений (6), (8) и условий (9), (10) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} w(r, t) &= w_s(r, t) + w_{d(1)}^q(r, t) + \left( w_{d(1)}^0(r, [t - \tau_q]) - \right. \\ &\left. - w_s(r, t) - w_{d(1)}^q(r, t) \right) \cdot H_0(t - \tau_q) + \\ &+ \sum_{m=0}^{N-1} \left[ \left( w_s(r, t) + w_{d(m+1)}^q(r, [t - m\tau]) + \right. \right. \\ &\left. \left. + \left( w_{d(m+1)}^0(r, [t - m\tau - \tau_q]) - \right. \right. \right. \\ &\left. \left. - w_s(r, t) - w_{d(m+1)}^q(r, [t - m\tau]) \right) \cdot H_0(t - m\tau - \tau_q) \right] - \\ &- \left[ w_s(r, t) + w_{d(m)}^q(r, [t - (m - 1)\tau]) + \right. \\ &+ \left( w_{d(m)}^0(r, [t - (m - 1)\tau - \tau_q]) - w_s(r, t) - \right. \\ &\left. - w_{d(m)}^q(r, [t - (m - 1)\tau]) \right) \times \\ &\left. \times H_0(t - (m - 1)\tau - \tau_q) \right] \cdot H_0(t - m\tau). \end{aligned} \quad (11)$$

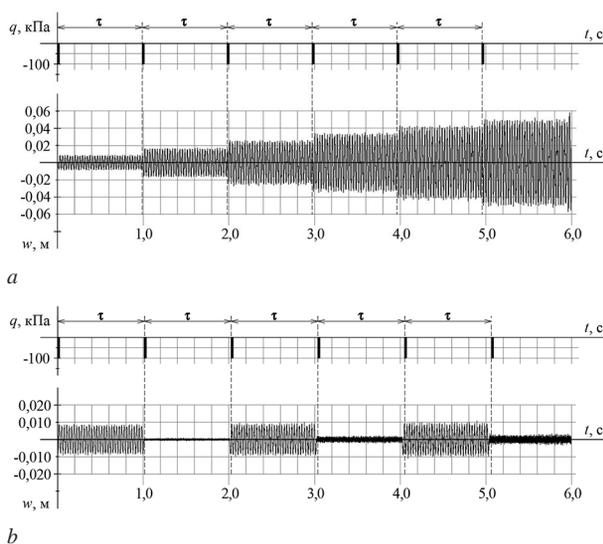
**Численное исследование.** Для численной апробации полученного решения рассмотрим защемленные по внешнему контуру (2) круговые трехслойные ступенчатые пластины, имеющие уширение в центральной части (см. рисунок 1 а). Внешний радиус пластин  $R_2 = 1$  м. Радиус центрального участка I составляет половину общего радиуса ( $R_1 = 0,5R_2$ ). Состав слоев пластин представлен материалами «Д16Т–фторопласт-4–Д16Т» и «сталь–ПС-1–сталь». Физико-механические характеристики материалов слоев: дюралюминий — Д16Т —  $\rho_{1,2} = 2700$  кг/м<sup>3</sup>,  $K_{1,2} = 0,8 \cdot 10^{11}$  Па,  $G_{1,2} = 0,267 \cdot 10^{11}$  Па; фторопласт-4 —  $\rho_3 = 2150$  кг/м<sup>3</sup>,

$K_3 = 345 \cdot 10^6$  Па,  $G_3 = 90 \cdot 10^6$  Па; сталь —  $\rho_{1,2} = 7850$  кг/м<sup>3</sup>,  $K_{1,2} = 1,913 \cdot 10^{11}$  Па,  $G_{1,2} = 0,78 \cdot 10^{11}$  Па; полистирольный пенопласт — ПС-1 —  $\rho_3 = 60$  кг/м<sup>3</sup>,  $K_3 = 10 \cdot 10^6$  Па,  $G_3 = 15 \cdot 10^6$  Па. Толщина внешних слоев пластин на участке I —  $h_{1(I)} = h_{2(I)} = 0,04$  м; на участке II —  $h_{1(II)} = h_{2(II)} = 0,02$  м. Толщина среднего заполнителя —  $h_3 = 0,3$  м. Интенсивность каждого воздействия  $q_{0(I)} = q_{0(II)} = -100$  кПа.

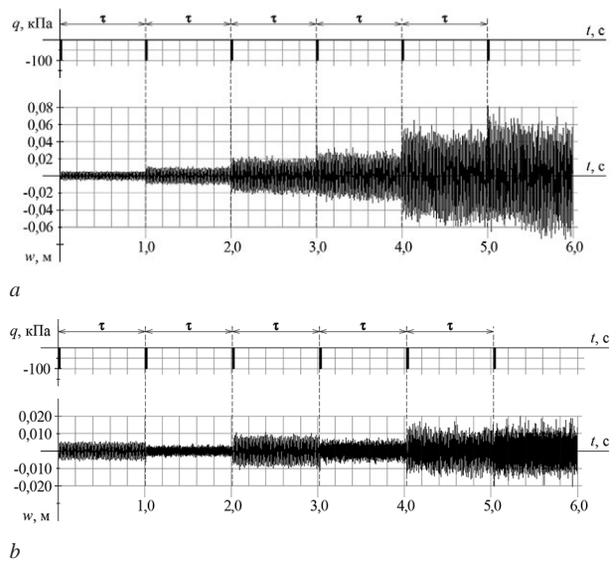
На рисунках 3 и 4 представлены графики изменения прогибов пластин во времени.

Пластины воспринимают воздействие из шести последовательных ударов, временной интервал между которыми привязан к первой частоте собственных колебаний пластин: для пакета «Д16Т–фторопласт–4–Д16Т» —  $\tau = 68\pi/\omega_0 = 0,99$  с и  $\tau = 69\pi/\omega_0 = 1,01$  с, для пакета «сталь–ПС-1–сталь» —  $\tau = 134\pi/\omega_0 = 1,00$  с и  $\tau = 135\pi/\omega_0 = 1,01$  с. Продолжительность приложения нагрузки совпадает с полупериодом первой формы колебаний пластин: для пакета «Д16Т–фторопласт–4–Д16Т» —  $\tau_q = \pi/\omega_0 = 14,57 \cdot 10^{-3}$  с; для пакета «сталь–ПС-1–сталь» —  $\tau_q = \pi/\omega_0 = 7,45 \cdot 10^{-3}$  с. Ограничение длины суммируемого ряда исследовалось в каждом случае отдельно. При построении графиков для пакета «Д16Т–фторопласт–4–Д16Т» в расчетах учитывались первые 12 членов ряда, для пакета «сталь–ПС-1–сталь» — 15 членов ряда, при этом учет отброшенных членов изменял результат менее чем на 0,2 %.

Из приведенных графиков видно, что длительность интервала между ударами оказывает весомое влияние на характер вынужденных колебаний пластины. Представив длительность интервала как  $\tau = k\pi/\omega_0$ , можно сформулировать, что в случаях, когда коэффициент  $k$  принимает четные значения, каждый последующий удар



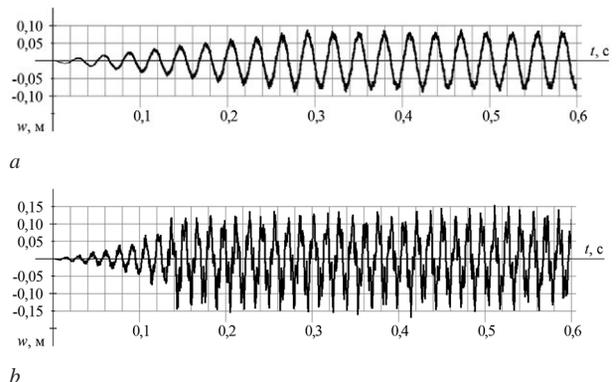
**Рисунок 3 — Изменение прогиба пластины «Д16Т–фторопласт–4–Д16Т» во времени: а — интервал воздействия  $68\pi/\omega_0$ ; б — интервал воздействия  $69\pi/\omega_0$**   
**Figure 3 — Time-varying behavior of deflection of the plate “D16T–PTFE–D16T”:** a — exposure interval is  $68\pi/\omega_0$ ; b — exposure interval is  $69\pi/\omega_0$



**Рисунок 4 — Изменение прогиба пластины «сталь–ПС-1–сталь» во времени: а — интервал воздействия  $134\pi/\omega_0$ ; б — интервал воздействия  $135\pi/\omega_0$**   
**Figure 4 — Time-varying behavior of deflection of the plate “steel–PS-1–steel”:** a — exposure interval is  $134\pi/\omega_0$ ; b — exposure interval is  $135\pi/\omega_0$

действует в унисон с собственными колебаниями пластины и способствует планомерному росту величины максимальных прогибов (см. рисунки 3 а и 4 а). При нечетных значениях  $k$  наблюдается попеременное возбуждение и гашение колебаний в пластине (см. рисунки 3 б и 4 б). Однако ввиду того, что период колебаний пластины отличается от периода первой формы колебаний, к которому привязан интервал между ударами, при нечетных значениях  $k$  со временем также наблюдается рост значений максимальных прогибов пластины.

Сократив временной интервал между ударами до периода собственных колебаний пластины ( $\tau = 2\pi/\omega_0$ ), можно смоделировать явление, подобное резонансу. На рисунке 5 представлена амплитуда колебаний рассматриваемых ранее пластин при восприятии 10 ударных воздействий, интервал между которыми составляет  $\tau = 2\pi/\omega_0$  (для пакета «Д16Т–фторопласт–4–Д16Т»  $\tau = 29,1 \cdot 10^{-3}$  с;



**Рисунок 5 — Изменение прогиба пластины во времени при  $\tau = 2\pi/\omega_0$ : а — «Д16Т–фторопласт–4–Д16Т»; б — «сталь–ПС-1–сталь»**  
**Figure 5 — Time-varying behavior of plate deflection at  $\tau = 2\pi/\omega_0$ :** a — “D16T–PTFE–D16T”; b — “steel–PS-1–steel”

«сталь–ПС–1–сталь»  $\tau = 14,9 \cdot 10^{-3}$  с). Продолжительность приложения: для пакета «Д16Т–фторопласт–4–Д16Т» —  $\tau_q = \pi/\omega_0 = 14,57 \cdot 10^{-3}$  с; для пакета «сталь–ПС–1–сталь» —  $\tau_q = \pi/\omega_0 = 7,45 \cdot 10^{-3}$  с. Суммарная продолжительность загрузки для пакета «Д16Т–фторопласт–4–Д16Т» —  $t = (N-1) \times \tau + \tau_q = 276,81 \cdot 10^{-3}$  с; «сталь–ПС–1–сталь» —  $t = 141,63 \cdot 10^{-3}$  с.

На представленном графике наблюдается равномерный рост амплитуды прогибов пластины в течение времени приложения внешней нагрузки (0,48 с). По завершению внешнего воздействия пластина переходит в фазу свободных колебаний с амплитудой прогибов, установившейся при последнем ударе.

**Выводы.** Представленная методика позволяет математически моделировать вынужденные колебания круговой трехслойной пластины ступенчато-переменной толщины под действием периодической ударной нагрузки постоянной интенсивности. Численные исследования показали существенное влияние продолжительности интервала между ударами на характер изменения амплитуды прогибов пластины.

*Работа выполнена в рамках ГПНИ «Механика, металлургия, диагностика в машиностроении».*

## Список литературы

- Dynamics and buckling of sandwich panels with stepped facings / C.H. Nguyen [et al.] // International journal of structural stability and dynamics. — 2011. — No. 4(11). — Pp. 697–716.
- Nguyen, C.H. Enhanced static response of sandwich panels with honeycomb cores through the use of stepped facings / C.H. Nguyen, K. Chandrashekhara, V. Birman // Journal of sandwich structures & materials. — 2011. — No. 2(13). — Pp. 237–260.
- Lal, R. On the use of differential quadrature method in the study of free axisymmetric vibrations of circular sandwich plates of linearly varying thickness / R. Lal, R. Rani // Journal of vibration and control. — 2016. — No. 7(22). — Pp. 1729–1748.
- Rani, R. Axially symmetric vibrations of circular sandwich plates of linearly varying thickness / R. Rani, R. Lal // Soft computing for problem solving: proc. of the 3rd international conference, New Delhi, March, 4, 2014 / Springer; eds. M. Pant [et al.]. — New Delhi, 2014. — No. 258. — Pp. 169–181.
- Lal, R. On radially symmetric vibrations of circular sandwich plates of non-uniform thickness / R. Lal, R. Rani // International journal of mechanical sciences. — 2015. — No. 99. — Pp. 29–39.
- Lal, R. On the radially symmetric vibrations of circular sandwich plates with polar orthotropic facings and isotropic core of quadratically varying thickness by harmonic differential quadrature method / R. Lal, R. Rani // Meccanica. — 2016. — No. 51. — Pp. 611–634.
- Rani, R. Radially symmetric vibrations of exponentially tapered clamped circular sandwich plate using harmonic differential quadrature method / R. Rani, R. Lal // Mathematical analysis and its applications. — 2015. — No. 143. — Pp. 633–643.
- Süslер, S. Nonlinear dynamic analysis of tapered sandwich plates with multi-layered faces subjected to air blast loading / S. Süslер, H. Türkmени // International journal of mechanics and materials in design. — 2017. — No. 13. — Pp. 429–451.
- Jalali, S.K. Buckling analysis of circular sandwich plates with tapered cores and functionally graded carbon nanotubes-reinforced composite face sheets / S.K. Jalali, M. Heshmati // Thin-walled structures. — 2016. — No. 100. — Pp. 14–24.
- Chang, J.S. Free vibrations of sandwich plates of variable thickness / J.S. Chang, H.C. Chen // Journal of sound and vibration. — 1992. — No. 2(155). — Pp. 195–208.
- Bauchau, O. Kirchhoff plate theory / O. Bauchau, J. Craig // Structural analysis. — 2009. — No. 163. — Pp. 819–914.
- Timoshenko, S.P. On the correction for shear the differential equation for transverse vibrations of the prismatic bars / S.P. Timoshenko // Philosophical magazine and journal of science. — 1921. — No. 245(41). — Pp. 744–746.
- Болотин, В.В. Механика многослойных конструкций / В.В. Болотин, Ю.Н. Новичков. — М.: Машиностроение, 1980. — 375 с.
- Болотин, В.В. К теории слоистых плит / Болотин В.В. // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. — 1963. — № 3. — С. 65–72.
- Новичков, Ю.Н. Вариационные принципы динамики и устойчивости многослойных оболочек / Новичков Ю.В. // Труды Моск. энерг. ин-та. Динамика и прочность машин. — 1973. — Вып. 164. — С. 14–22.
- Григолюк, Э.И. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек / Э.И. Григолюк, П.П. Чулков. — М.: Машиностроение, 1973. — 172 с.
- Григолюк, Э.И. Нелинейные уравнения тонких многослойных оболочек регулярного строения / Э.И. Григолюк, П.П. Чулков // Инженерный журнал. Механика твердого тела. — 1967. — № 1. — С. 163–169.
- Leonenko, D.V. Elastic bending of a three-layer circular plate with step-variable thickness / D.V. Leonenko // Mechanics of machines, mechanisms and materials. — 2021. — No. 1(54). — Pp. 25–29.
- Леоненко, Д.В. Локальное нагружение ступенчатой круговой сэндвич-пластины / Д.В. Леоненко // Механика. Исследования и инновации. — 2021. — № 14(14). — С. 126–130.
- Леоненко, Д.В. Поперечный изгиб круговой сэндвич-пластины ступенчатой толщины / Д.В. Леоненко // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. — 2020 — № 6(123). — С. 151–155.
- Парфенова, В.С. Деформирование круглой упругой трехслойной пластины со ступенчато-переменной границей / В.С. Парфенова // Механика. Исследования и инновации. — 2017. — № 10(10). — С. 157–163.
- Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойной ортотропной пластины ступенчато-переменной толщины / Э.И. Старовойтов, Д.В. Тарлаковский // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. — 2014. — № 2(304). — С. 38–43.
- Шляхин, Д.А. Вынужденные осесимметричные колебания тонкой круглой пластины ступенчато переменной толщины и жесткости / Д.А. Шляхин // Известия высших учебных заведений. Строительство. — 2013. — № 4(652). — С. 13–20.
- Шляхин, Д.А. Вынужденные осесимметричные колебания тонкой круглой биморфной пластины ступенчато переменной толщины и жесткости / Д.А. Шляхин // Инженерный вестник Дона. — 2013. — № 1(24). — С. 36–45.
- Accurate free vibration analysis of thick laminated circular plates with attached rigid core / Sh. Hosseini-Hashemi [et al.] // Journal of sound and vibration. — 2012. — No. 25(331). — Pp. 5581–5596.
- Hosseini-Hashemi, Sh. An accurate mathematical study on the free vibration of stepped thickness circular/annular Mindlin functionally graded plates / Sh. Hosseini-Hashemi, M. Derakhshani, M. Fadaee // Applied mathematical modelling. — 2013. — No. 6(37). — Pp. 4147–4164.
- Molla-Alipour, M. Bending analysis of FG circular and annular plates with stepped thickness variations by using a new exact closed form solution [Electronic resource] / M. Molla-Alipour. — 2017. — Mode of access: <https://www.semanticscholar.org/paper/Bending-Analysis-of-FG-Circular-and-Annular-Plates-Molla-Alipour/a052dc4841b7b7f41692655a0da0f2abc14cfba1#paper-header>.
- Зорич, В.А. Математический анализ. / В.А. Зорич. — изд. 6-е доп. — М.: МЦНМО, 2012. — Часть 1. — 710 с.
- Григолюк, Э.И. Современное состояние теории многослойных оболочек / Э.И. Григолюк, Ф.А. Коган // Прикладная механика. — 1972. — № 6(8). — С. 5–17.
- Carrera, E. Historical review of zig-zag theories for multi-layered plates and shells / E. Carrera // Applied Mechanics Reviews. — 2003. — No. 3(56). — Pp. 287–308.
- Icardi, U. Assessment of recent zig-zag theories for laminated and sandwich structures / U. Icardi, F. Sola // Composites Part B-engineering. — 2016. — No. 97. — Pp. 26–52.

32. Новацкий, В. Теория упругости / В. Новацкий. — М.: Мир, 1975. — 872 с.
33. Zhou, Z.H. Natural vibration of circular and annular thin plates by Hamiltonian approach / Z.H. Zhou [et al.] // *Journal of Sound and Vibration*. — 2011. — No. 5(330). — Pp. 1005–1017.
34. Маркова, М.В. Постановка начально-краевой задачи об осесимметричных колебаниях круговой трехслойной пластины переменной толщины / М.В. Маркова, Д.В. Леоненко // *Теоретическая и прикладная механика: междунар. науч.-техн. сб.* — Минск, 2022. — № 36. — С. 3–10.
35. Деформирование ступенчатой композитной балки в температурном поле / Э.И. Старовойтов [и др.] // *Инженерно-физический журнал*. — 2015. — Вып. 88, № 4. — С. 987–993.
36. Старовойтов, Э.И. Изгиб трехслойного стержня со ступенчато-переменной границей, частично опертого на упругое основание / Э.И. Старовойтов, А.А. Поддубный // *Механика машин, механизмов и материалов*. — 2011. — № 1(14). — С. 47–55.
37. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойных физически нелинейных стержней / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, Л.Н. Рабинский. — М.: Изд-во МАИ, 2016. — 184 с.
38. Тонг, К.Н. Теория механических колебаний / К.Н. Тонг. — М.: Машгиз, 1963. — 351 с.
39. Араманович, И.Г. Уравнения математической физики / И.Г. Араманович, В.И. Левин. — М.: Наука, 1969. — 288 с.
40. Маркова, М.В. Собственные колебания круговой трехслойной ступенчатой пластины / М.В. Маркова // *Механика. Исследования и инновации*. — 2021. — № 14(14). — С. 147–158.
41. Бейтман, Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтман, А. Эрдейи. — М.: Наука, 1974. — 296 с.
42. Ватсон, Г.Н. Теория Бесселевых функций / Г.Н. Ватсон. — М.: Изд-во иностр. лит., 1949. — 799 с.

LEONENKO Denis V., D. Sc. in Phys. and Math., Prof.

Professor of the Department “Structural Mechanics”<sup>1</sup>

E-mail: leoden@tut.by

MARKOVA Marina V.

Postgraduate Student of the Department “Structural Mechanics”<sup>1</sup>

E-mail: 1987marinamarkova@gmail.com

<sup>1</sup>Belarusian State University of Transport, Gomel, Republic of Belarus

Received 01 June 2022.

## VIBRATIONS OF A THREE-LAYER CIRCULAR STEP PLATE UNDER PERIODIC IMPACT

*Forced oscillations of a three-layer circular plate with step-variable thickness of the outer layers are analyzed. The deformation of the plate is described with the zig-zag theory. In thin border layers of plate Kirchhoff's hypotheses are valid. In a relatively thick in thickness medium layer Timoshenko's hypothesis on the straightness and incompressibility of the deformed normal is fulfilled. The equations of motion are derived from Hamilton's variational principle. A special case of exposure is considered: periodic sequence of strokes with constant intensity. The problem is reduced to finding three required functions in each section, deflection, shear and radial displacement of the median plane of the filler. The solution is presented as a sum of quasi-static and dynamic components of the unknown displacements. Numerical results of the obtained solution are presented. The influence of the impact stress on the oscillatory character is analyzed.*

**Keywords:** circular three-layer plate, plate with step-variable thickness, forced vibration, periodic strokes

DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2022-3-60-68-76>

### References

1. Nguyen C.H., Butukuri R.R., Chandrashekhara K., Birman V. Dynamics and buckling of sandwich panels with stepped facings. *International journal of structural stability and dynamics*, 2011, no. 4(11), pp. 697–716.
2. Nguyen C.H., Chandrashekhara K., Birman V. Enhanced static response of sandwich panels with honeycomb cores through the use of stepped facings. *Journal of sandwich structures & materials*, 2011, no. 2(13), pp. 237–260.
3. Lal R., Rani R. On the use of differential quadrature method in the study of free axisymmetric vibrations of circular sandwich plates of linearly varying thickness. *Journal of vibration and control*, 2016, no. 7(22), pp. 1729–1748.
4. Rani R., Lal R. Axially symmetric vibrations of circular sandwich plates of linearly varying thickness. *Proc. 3rd International conference on soft computing for problem solving “Advances in intelligent systems and computing”*. New Delhi, 2014, no. 258, pp. 169–181.
5. Lal R., Rani R. On radially symmetric vibrations of circular sandwich plates of non-uniform thickness. *International journal of mechanical sciences*, 2015, no. 99, pp. 29–39.
6. Lal R., Rani R. On the radially symmetric vibrations of circular sandwich plates with polar orthotropic facings and isotropic core of quadratically varying thickness by harmonic differential quadrature method. *Meccanica*, 2016, no. 51, pp. 611–634.
7. Rani R., Lal R. Radially symmetric vibrations of exponentially tapered clamped circular sandwich plate using harmonic differential quadrature method. *Mathematical analysis and its applications*, 2015, no. 143, pp. 633–643.
8. Süssler S., Türkmeni H. Nonlinear dynamic analysis of tapered sandwich plates with multi-layered faces subjected to air blast loading. *International journal of mechanics and materials in design*, 2017, no. 13, pp. 429–451.
9. Jalali S.K., Heshmati M. Buckling analysis of circular sandwich plates with tapered cores and functionally graded carbon nano-

- tubes-reinforced composite face sheets. *Thin-walled structures*, 2016, no. 100, pp. 14–24.
10. Chang J.S., Chen H.C. Free vibrations of sandwich plates of variable thickness. *Journal of sound and vibration*, 1992, no. 2(155), pp. 195–208.
  11. Bauchau O., Craig J. Kirchhoff plate theory. *Structural analysis*, 2009, vol. 163, pp. 819–914.
  12. Timoshenko S.P. On the correction for shear the differential equation for transverse vibrations of the prismatic bars. *Philosophical magazine and journal of science*, 1921, no. 245(41), pp. 744–746.
  13. Bolotin V.V., Novichkov Yu.N. *Mekhanika mnogosloynnykh konstruktsey* [Mechanics of multilayer structures]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1980. 375 p. (in Russ.).
  14. Bolotin V.V. K teorii sloistykh plit [Towards the theory of layered slabs]. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika i mashinostroenie*, 1963, no. 3, pp. 65–72 (in Russ.).
  15. Novichkov Yu.N. Variatsionnye printsipy dinamiki i ustoychivosti mnogosloynnykh obolochek [Variational principles of dynamics and stability of multilayer shells]. *Trudy Moskovskogo energeticheskogo instituta. Dinamika i prochnost mashin*, 1973, no. 164, pp. 14–22 (in Russ.).
  16. Grigolyuk E.I., Chulkov P.P. *Ustoychivost i kolebaniya trekhsloynnykh obolochek* [Stability and vibrations of three-layer shells]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1973. 172 p. (in Russ.).
  17. Grigolyuk E.I., Chulkov P.P. Nelineynye uravneniya tonkikh mnogosloynnykh obolochek regulyarnogo stroeniya [Nonlinear equations of thin multilayer shells of regular structure]. *Inzhenernyy zhurnal. Mekhanika tverdogo tela*, 1967, no. 1, pp. 163–169 (in Russ.).
  18. Leonenko D.V. Elastic bending of a three-layer circular plate with step-variable thickness. *Mechanics of machines, mechanisms and materials*, 2021, no. 1(54), pp. 25–29.
  19. Leonenko D.V. Lokalnoe nagruzhenie stupenchatoy krugovoy sendvich-plastiny [Local loading of a stepped circular sandwich plate]. *Mechanics. Researches and innovations*, 2021, no. 14(14), pp. 126–130 (in Russ.).
  20. Leonenko D.V. Poperechnyy izgib krugovoy sendvich-plastiny stupenchatoy tolshchiny [Transverse bending of a circular sandwich plate of stepped thickness]. *Proceedings of Francisk Skorina Gomel State University*, 2020, no. 6(123), pp. 151–155 (in Russ.).
  21. Parfenova V.S. Deformirovanie krugloy uprugoy trekhsloynnoy plastiny so stupenchatoy-peremennoy granitsey [Deformation of a circular elastic three-layer plate with a step-variable boundary]. *Mechanics. Researches and innovations*, 2017, no. 10(10), pp. 157–163 (in Russ.).
  22. Starovoytov E.I., Tarlakovskiy D.V. Deformirovanie trekhsloynnoy ortotropnoy plastiny stupenchatoy-peremennoy tolshchiny [Deformation of a three-layer orthotropic plate of stepwise variable thickness]. *Fundamental and applied problems of technics and technology*, 2014, no. 2(304), pp. 38–43 (in Russ.).
  23. Shlyakhin D.A. Vynuzhdennyye osesimmetrichnyye kolebaniya tonkoy krugloy plastiny stupenchatoy peremennoy tolshchiny i zhestkosti [Forced axisymmetric oscillations of a thin circular plate of stepwise variable thickness and stiffness]. *News of higher educational institutions. Construction*, 2013, no. 4(652), pp. 13–20 (in Russ.).
  24. Shlyahin D.A. Vynuzhdennyye osesimmetrichnyye kolebaniya tonkoy krugloy bimorfnoy plastiny stupenchatoy peremennoy tolshchiny i zhestkosti [Forced axisymmetric oscillations of a thin circular bimorphic plate of stepwise variable thickness and stiffness]. *Engineering journal of Don*, 2013, no. 1(24), pp. 36–45 (in Russ.).
  25. Hosseini-Hashemi Sh., Rezaee V., Atashipour S.R., Girhammar U.A. Accurate free vibration analysis of thick laminated circular plates with attached rigid core. *Journal of sound and vibration*, 2012, no. 25(331), pp. 5581–5596.
  26. Hosseini-Hashemi Sh., Derakhshani M., Fadaee M. An accurate mathematical study on the free vibration of stepped thickness circular/annular Mindlin functionally graded plates. *Applied mathematical modelling*, 2013, no. 6(37), pp. 4147–4164.
  27. Molla-Alipour M. *Bending analysis of FG circular and annular plates with stepped thickness variations by using a new exact closed form solution*. 2017. Available at: <https://www.semanticscholar.org/paper/Bending-Analysis-of-FG-Circular-and-Annular-Plates-Molla-Alipour/a052dc4841b7b7f41692655a0da0f2abc14cfba1#paper-header>.
  28. Zorich V.A. *Matematicheskiy analiz. Chast 1* [Mathematical analysis. Part 1]. Moscow, MTsNMO Publ., 2012. 710 p. (in Russ.).
  29. Grigolyuk E.I., Kogan F.A. Sovremennoe sostoyanie teorii mnogosloynnykh obolochek [The current status of the theory of multilayer shells]. *Prikladnaya mekhanika*, 1972, no. 6(8), pp. 5–17 (in Russ.).
  30. Carrera E. Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells. *Applied mechanics reviews*, 2003, no. 3(56), pp. 287–308.
  31. Icardi U., Sola F. Assessment of recent zig-zag theories for laminated and sandwich structures. *Composites Part B-engineering*, 2016, no. 97, pp. 26–52.
  32. Nowacki W. *Teoria sprężystości*. Warszawa, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1970.
  33. Zhou Z.H., Wong K.W., Xu X.S., Leung A.Y.T. Natural vibration of circular and annular thin plates by Hamiltonian approach. *Journal of sound and vibration*, 2011, no. 5(330), pp. 1005–1017.
  34. Markova M.V., Leonenko D.V. Postanovka nachalno-kraevoy zadachi ob osesimmetrichnykh kolebaniyakh krugovoy trekhsloynnoy plastiny peremennoy tolshchiny [Definition of the initial-boundary value problem for axisymmetric vibrations of a circular three-layer plate with variable thickness]. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika*, 2022, iss. 36, pp. 3–10 (in Russ.).
  35. Starovoytov E.I., Pleskachevskiy Yu.M., Leonenko D.V., Tarlakovskiy D.V. Deformirovanie stupenchatoy kompozitnoy balki v temperaturnom pole [Straining of a step-variable thickness composite beam in a temperature field]. *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal*, 2015, vol. 88, no. 4, pp. 987–993 (in Russ.).
  36. Starovoytov E.I., Poddubnyy A.A. Izgib trekhsloynnogo sterzhnya so stupenchatoy-peremennoy granitsey, chastichno opertogo na uprugoe osnovanie [The bending of three-layer beam with variable border laying on the elastic basis]. *Mechanics of machines, mechanisms and materials*, 2011, no. 1(14), pp. 47–55 (in Russ.).
  37. Starovoytov E.I., Leonenko D.V., Rabinskiy L.N. *Deformirovanie trekhsloynnykh fizicheski nelineynnykh sterzhney* [Deformation of three-layer physically-nonlinear bars]. Moscow, MAI Publ., 2016. 184 p. (in Russ.).
  38. Tong K.N. *Theory of mechanical vibration*. New York, Wiley, 1960. 370 p.
  39. Aramanovich I.G., Levin V.I. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 288 p. (in Russ.).
  40. Markova M.V. Sobstvennyye kolebaniya krugovoy trekhsloynnoy stupenchatoy plastiny [Self-oscillations of the circular three-layer staged-thickness plate]. *Mechanics. Researches and innovations*, 2021, no. 14(14), pp. 147–158 (in Russ.).
  41. Bateman H., Arthur E. *Higher transcendental functions*. New York, McGraw-Hill, 1953, 990 p.
  42. Watson G.N. *A treatise on the theory of Bessel functions*. Cambridge University Press, 1944. 804 p.