

# МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 620.178

Д.А. ЧЕРНОУС, канд. техн. наук, доц.  
доцент кафедры «Техническая физика и теоретическая механика»<sup>1</sup>  
E-mail: tm@bsut.by

Е.В. КОДНЯНКО  
инженер по научно-технической информации отдела научно-технической информации<sup>2</sup>  
E-mail: onti@sipr.by

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Республика Беларусь

<sup>2</sup>ЗАО «Солигорский Институт проблем ресурсосбережения с Опытным производством», г. Солигорск, Республика Беларусь

Поступила в редакцию 25.08.2022.

## АСИМПТОТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕЛА КАЧЕНИЯ С ТОНКИМ ДЕФОРМИРУЕМЫМ ОБОДОМ

*На основе асимптотического подхода к решению краевой задачи теории упругости для тонкой полосы, жестко сцепленной с недеформируемым основанием, выведены дифференциальные уравнения для определения нормальной и сдвиговой нагрузок, распределенных на свободной от закрепления грани полосы. Данные уравнения использованы для решения задачи о контакте жесткого цилиндра, имеющего тонкий упругий обод, с недеформируемой горизонтальной шероховатой опорной поверхностью. Рассматривается нагружение цилиндра вертикальной силой при заданной осадке центра цилиндра. Получены расчетные эпюры контактного давления и сдвигового контактного напряжения. В отличие от ранее используемых, разработанная методика позволяет учесть наличие в области контакта зон сцепления и проскальзывания, а также использовать математически строгое решение определяющих уравнений для контактного давления и сдвигового контактного напряжения. Определено значение вертикальной силы, действующей на цилиндр при заданном смещении центра жесткого цилиндра. Установлено распределение в ободе интенсивности тензора напряжений. Результаты применения разработанной методики сопоставлены с расчетными оценками, полученными на основе точного решения краевой задачи для полосы произвольной толщины и в рамках методики, подразумевающей использование упрощенной модели Винклера основания. Получены расчетные зависимости погрешности результатов использования разработанной методики от толщины и коэффициента Пуассона материала обода. Описано влияние коэффициента трения обода с опорной поверхностью на контактное давление, сдвиговое контактное давление и максимальное значение интенсивности тензора напряжений в ободе. Сделан вывод о правомерности использования разработанной методики при решении контактных задач для тел качения, имеющих относительно тонкий упругий обод.*

**Ключевые слова:** контактная задача, тонкий слой, асимптотическое приближение, контактное давление, сдвиговое контактное давление, интенсивность тензора напряжений

DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2023-1-62-79-87>

**Введение.** В различных узлах трения современных машин и механизмов все чаще используются детали с покрытиями или модифицированным

поверхностным слоем. Применение покрытий позволяет существенно изменить триботехнические показатели контактной пары без изменения

основного материала детали. Выбор оптимального состава и толщины покрытия требует наличия методики, позволяющей прогнозировать значения параметров контактного взаимодействия при наличии поверхностного слоя, характеристики которого отличаются от характеристик основания. Анализ напряженно-деформированного состояния слоистых систем при различных режимах нагружения является одной из классических задач механики деформируемого твердого тела [1, 2]. Традиционно задача теории упругости для слоя произвольной толщины решается с использованием интегральных преобразований [3]. Однако непосредственное использование получаемых при этом решений при практических инженерных расчетах затруднено сложностью математического аппарата. Поэтому в большинстве случаев используют различные асимптотические приближения точного решения для относительно тонких и толстых слоев. Тонким называют слой, толщина которого  $h$  намного меньше характерного размера  $a$  области распределения нагрузки, для толстого слоя  $h \gg a$ . Асимптотический подход для толстого слоя реализуется путем разложения подынтегральных функций, входящих в точное решение, в степенные ряды по степени малого параметра  $q_a = a/h$ . Данная методика описана в научной литературе достаточно полно и подробно. Исследована сходимость асимптотических решений [4]. Приближения третьего-пятого порядка использованы при решении различных контактных задач для изотропных и анизотропных покрытий [5]. Реализация асимптотического подхода для тонких слоев не требует получения точного решения в интегральной форме. При этом общее решение уравнений равновесия элементарного объема в смещениях задается в форме степенных рядов по степени малого параметра  $q = h/a$ . Коэффициенты данных рядов являются искомыми функциями приведенных (безразмерных) координат. Для нахождения этих функций в общем решении последовательно оставляют слагаемые не выше нулевой, первой, второй и т. д. степени параметра  $q$ . В работах [6, 7] с использованием асимптотического приближения второго порядка по  $q$  выведены определяющие дифференциальные уравнения для нормального и сдвигового напряжений на поверхности тонкого покрытия при заданных смещениях точек этой поверхности. Там же [7] приведен пример использования частных решений данных уравнений для описания процесса внедрения в тонкое покрытие осесимметричного индентора. Однако существующие математические модели, основанные на асимптотических решениях для тонких слоев, имеют ряд ограничений.

Для анализа контактного взаимодействия слоистых тел при учете наличия в области контакта зон сцепления и проскальзывания используется, главным образом, точное решение для полосы

произвольной толщины [2, 8]. Также известны [8] решения контактной задачи с учетом сцепления и проскальзывания при использовании асимптотического приближения для толстой полосы ( $h \gg a$ ). При использовании асимптотического подхода для тонкой полосы [6] сдвиговое напряжение в области контакта либо не учитываются, либо рассматривается только случай распространения зоны проскальзывания на всю область контакта [7].

Кроме того, в известных публикациях [6, 7] отсутствует количественное сопоставление результатов использования асимптотического подхода с расчетными оценками, полученными в рамках упрощенных моделей основания и на основе точного решения.

В связи с вышесказанным, целью настоящего исследования является совершенствование расчетной методики асимптотического решения контактных задач для тел с тонкими поверхностными слоями в плоской постановке, направленное на расчет контактных напряжений в зонах сцепления и проскальзывания, а также описание распределения напряжений по толщине слоя.

**Постановка краевой задачи.** Рассмотрим деформируемый слой толщины  $h$ , жестко связанный с недеформируемым основанием. Слой образован изотропным линейно упругим материалом, механические свойства которого характеризуются модулем Юнга  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$ . Выберем декартову систему координат  $x, y, z$ . Ось  $z$  перпендикулярна поверхности слоя. Поверхность сцепления с основанием соответствует координате  $z = 0$ , а свободная от закрепления поверхность —  $z = h$ . Размеры слоя и рассматриваемые в рамках настоящей работы режимы нагружения обеспечивают условия плоской деформации  $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{xy} = 0$ . В этом случае связь компонент тензора напряжений с проекциями упругого смещения точек слоя описывается соотношениями:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= C_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + C_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z}; & \sigma_{zz} &= C_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z} + C_{13} \frac{\partial u_x}{\partial x}; \\ \sigma_{yy} &= C_{12} \frac{\partial u_x}{\partial x} + C_{23} \frac{\partial u_z}{\partial z}; & \sigma_{xz} &= C_{44} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right); \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{yz} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $C_{ij}$  ( $i, j = 1 \dots 6$ ) — элементы матрицы упругости материала обода. Для изотропного материала данные элементы определяются модулем  $E$  и коэффициентом  $\nu$ :

$$\begin{aligned} C_{11} = C_{33} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \\ C_{13} = C_{23} = C_{12} &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; & C_{44} &= \frac{E}{2(1+\nu)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Форма записи (1) позволяет использовать получаемые решения как для изотропного, так и для ортотропного материала.

Уравнения равновесия элементарного объема слоя в напряжениях имеют вид:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

Граничные условия при  $z = 0$  соответствуют сцеплению с недеформируемым основанием

$$u_x|_{z=0} = u_z|_{z=0} = 0. \quad (4)$$

На поверхности  $z = h$  зависимость от координаты  $x$  осевой компоненты тензора напряжений  $\sigma_{zz}$  описывается функцией  $\sigma_{zh}(x)$ , а зависимость сдвиговой компоненты  $\sigma_{xz}$  — функцией  $\tau_{zh}(x)$ . В этом случае граничные условия на верхней поверхности слоя задаются следующим образом:

$$\left. \frac{\partial u_x}{\partial z} \right|_{z=h} + \left. \frac{\partial u_z}{\partial x} \right|_{z=h} = \frac{\tau_{zh}}{C_{44}}; \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial u_z}{\partial z} \right|_{z=h} + \frac{C_{13}}{C_{33}} \left. \frac{\partial u_x}{\partial x} \right|_{z=h} = \frac{\sigma_{zh}}{C_{33}}.$$

**Решение краевой задачи.** При решении задач теории упругости для тонкого слоя традиционно используют [6, 7] переход к безразмерным координатам и проекциям смещения:

$$x^* = \frac{x}{a}; \quad z^* = \frac{z}{h}; \quad u_x^* = \frac{u_x}{h}; \quad u_z^* = \frac{u_z}{h}, \quad (6)$$

где  $a$  — характерный размер области приложения нагрузки или области контакта.

Подставив соотношения (1) в равенства (3) и выполнив математические преобразования, получим систему дифференциальных уравнений в частных производных для безразмерных проекций смещения  $u_x^*$ ,  $u_z^*$ :

$$\frac{\partial^2 u_x^*}{\partial (z^*)^2} + q \frac{C_{13} + C_{44}}{C_{44}} \frac{\partial^2 u_z^*}{\partial x^* \partial z^*} + q^2 \frac{C_{11}}{C_{44}} \frac{\partial^2 u_x^*}{\partial (x^*)^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 u_z^*}{\partial (z^*)^2} + q \frac{C_{13} + C_{44}}{C_{33}} \frac{\partial^2 u_x^*}{\partial x^* \partial z^*} + q^2 \frac{C_{44}}{C_{33}} \frac{\partial^2 u_z^*}{\partial (x^*)^2} = 0, \quad (7)$$

где  $q = h/a$  — малый параметр. Граничные условия для проекций  $u_x^*$ ,  $u_z^*$  имеют вид:

$$u_x^*|_{z^*=0} = u_z^*|_{z^*=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial u_x^*}{\partial z^*} \right|_{z^*=1} + q \left. \frac{\partial u_z^*}{\partial x^*} \right|_{z^*=1} = \frac{\tau_{zh}}{C_{44}};$$

$$\left. \frac{\partial u_z^*}{\partial z^*} \right|_{z^*=1} + q \frac{C_{13}}{C_{33}} \left. \frac{\partial u_x^*}{\partial x^*} \right|_{z^*=1} = \frac{\sigma_{zh}}{C_{33}}. \quad (8)$$

Величины  $u_x^*$  и  $u_z^*$ , являющиеся решениями системы (7), зависят не только от координат  $x^*$  и  $z^*$ , но и от параметра  $q$ . Для тонкого слоя  $q \ll 1$ . Данное обстоятельство позволяет разложить искомые функции в ряды:

$$u_x^* = u_{x0}^* + q u_{x1}^* + q^2 u_{x2}^* + O(q^3); \quad (9)$$

$$u_z^* = u_{z0}^* + q u_{z1}^* + q^2 u_{z2}^* + O(q^3),$$

где  $u_{xi}^*$ ,  $u_{zi}^*$  — искомые функции безразмерных координат  $x^*$  и  $z^*$ . Для определения данных функ-

ций в системе (7) и условиях (8) последовательно оставляем слагаемые не выше нулевой, первой и второй степени по параметру  $q$ . При этом на каждом шаге решается дифференциальное уравнение, в котором вторая производная от искомой функции по переменной  $z^*$  равна известной функции от  $x^*$  и  $z^*$ . После выполнения математических преобразований для исходных (размерных) проекций смещений получим:

$$u_x = \frac{\tau_{zh}}{C_{44}} z + \frac{zh}{C_{33} C_{44}} \left( C_{13} - \frac{z}{2h} (C_{13} + C_{44}) \right) \frac{d\sigma_{zh}}{dx} +$$

$$+ \frac{zh^2}{2C_{33} C_{44}^2} \frac{d^2 \tau_{zh}}{dx^2} \left[ C_{11} C_{33} + C_{xz} (C_{44} - C_{13}) - \right. \quad (10)$$

$$\left. - \frac{z}{h} G_{xz} (C_{13} + C_{44}) - \frac{z^2}{3h^2} (C_{xx} C_{zz} - (C_{13} + C_{44})^2) \right];$$

$$u_z = \frac{\sigma_{zh}}{C_{33}} z + \frac{zh}{C_{33} C_{44}} \left( C_{44} - \frac{z}{2h} (C_{13} + C_{44}) \right) \frac{d\tau_{zh}}{dx} +$$

$$+ \frac{zh^2 C_{13}}{2C_{33} C_{44}^2} \frac{d^2 \sigma_{zh}}{dx^2} \left[ C_{44} - \frac{z}{h} (C_{13} + C_{44}) + \frac{z^2}{3h^2} (C_{13} + 2C_{44}) \right].$$

При решении контактных задач требуется установить связь между контактным давлением  $p$ , сдвиговым напряжением  $\tau$  в области контакта, «углублением»  $u$  и горизонтальным смещением  $w$  точек поверхностей контактирующих тел. В обозначениях, принятых в данной работе, величины  $p$ ,  $\tau$ ,  $u$  и  $w$  задаются следующим образом:

$$p = -\sigma_{zz}|_{z=h}; \quad \tau = \sigma_{xz}|_{z=h}; \quad u = -u_z|_{z=h}; \quad w = u_x|_{z=h}.$$

Для установления связи между данными величинами в решениях (10) достаточно принять  $z = h$ . При этом получим следующие уравнения:

$$u = Z_{0u} p + Z_{1u} \frac{d\tau}{dx} + Z_{2u} \frac{d^2 p}{dx^2}; \quad (11)$$

$$w = Z_{0w} \tau + Z_{1w} \frac{dp}{dx} + Z_{2w} \frac{d^2 \tau}{dx^2}.$$

Здесь введены обозначения:

$$Z_{0u} = \frac{h}{C_{33}} = \frac{h(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}; \quad Z_{0w} = \frac{h}{C_{44}} = 2 \frac{h(1+\nu)}{E};$$

$$Z_{1u} = -Z_{1w} = -\frac{h^2(C_{44} - C_{13})}{2C_{33} C_{44}} = -\frac{h^2(1-4\nu)(1+\nu)}{2E(1-\nu)};$$

$$Z_{2u} = \frac{h^3 C_{13}(C_{44} - C_{13})}{3C_{33}^2 C_{44}} = \frac{h^3 \nu(1-4\nu)(1+\nu)}{3E(1-\nu)^2}; \quad (12)$$

$$Z_{2w} = \frac{h^3}{3C_{33} C_{44}^2} (C_{11} C_{33} - (C_{44} - C_{13})^2 - C_{44} C_{13}) =$$

$$= \frac{h^3(1+\nu)(3+4\nu)}{3E(1-\nu)}.$$

**Решение контактной задачи.** В качестве примера контактной задачи (рисунок 1) рассмотрим взаимодействие жесткого цилиндра, имеющего

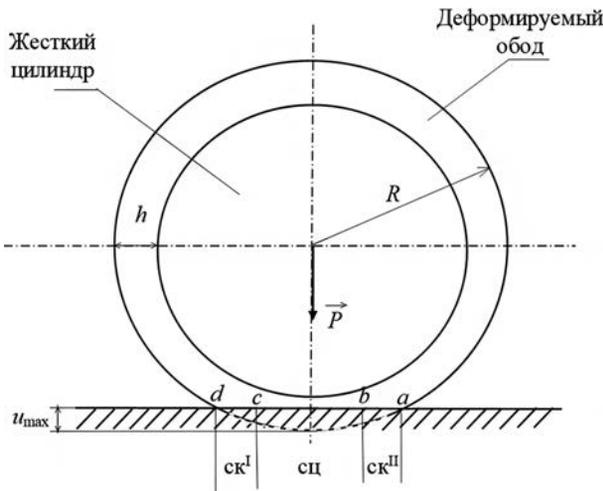


Рисунок 1 — Расчетная схема контактной задачи для жесткого цилиндра с деформируемым ободом  
 Figure 1 — Calculation model of a contact problem for the rigid cylinder with a deformable rim

упругий обод толщины  $h$  с недеформируемым основанием. Общий радиус цилиндра с ободом —  $R$ , длина образующей —  $L$ . К центру масс цилиндра приложена вертикальная сила  $P$ . Горизонтальная (параллельная опорной поверхности) нагрузка отсутствует. Рассматривается только вертикальное смещение (осадка) центра масс цилиндра.

В области контакта «углубления» точек поверхности обода определяются соотношением

$$u = u_{\max} - \frac{x^2}{2R}, \quad (13)$$

где  $u_{\max}$  — вертикальное смещение центра масс цилиндра, совпадающее с максимальным «углублением» точек поверхности обода.

Область контакта разделяется на центральную зону сцепления и симметрично расположенные две зоны проскальзывания.

**Зона сцепления.** При действии на колесо только вертикальной силы  $P$  горизонтальные смещения  $w$  в зоне сцепления будут равны нулю. Контактное давление  $p$  и сдвиговое напряжение  $\tau$  определяются из системы дифференциальных уравнений (11) с учетом (13) и (14). Решение данной системы имеет вид:

$$p^{\text{сц}} = \frac{u_{\max}}{Z_{0u}} + \frac{Z_{2u}Z_{0w} - Z_{1u}Z_{1w}}{RZ_{0w}Z_{0u}^2} - \frac{x^2}{2RZ_{0u}} + \sum_{i=1}^4 C_i^{\text{сц}} \exp(\alpha_i x);$$

$$\tau^{\text{сц}} = \frac{Z_{1w}x}{RZ_{0w}Z_{0u}} - Z_{1w} \sum_{i=1}^4 C_i^{\text{сц}} \frac{\alpha_i}{Z_{0w} + Z_{2w}\alpha_i^2} \exp(\alpha_i x),$$

где  $C_i^{\text{сц}}$  — константы, определяемые из граничных условий;  $\alpha_i$  — характеристический множитель, являющийся корнем уравнения четвертой степени

$$A\alpha^4 + B\alpha^2 + C = 0. \quad (15)$$

Здесь введены обозначения:

$$A = Z_{2u}Z_{2w}; \quad B = Z_{0u}Z_{2w} + Z_{0w}Z_{2u} - Z_{1u}Z_{1w}; \quad C = Z_{0u}Z_{0w}.$$

Верхний индекс «сц» означает, что величина определяется для зоны сцепления.

**Зона проскальзывания.** В данной зоне величины  $p$  и  $\tau$  связаны соотношением

$$\tau_{\text{ск}}^{\text{abc}} = fp^{\text{ск}}. \quad (16)$$

где  $\tau_{\text{ск}}^{\text{abc}}$  — абсолютное значение сдвигового напряжения;  $f$  — коэффициент трения между поверхностями обода и опорной поверхности. Верхний индекс «ск» означает, что величина определяется для зоны проскальзывания.

Используя закон трения Кулона (16) в первом соотношении системы (11), получим дифференциальное уравнение для давления  $p$ :

$$u_{\max} - \frac{x^2}{2R} = Z_{0u}p \pm Z_{1u}f \frac{dp}{dx} + Z_{2u} \frac{d^2p}{dx^2}. \quad (17)$$

Здесь и далее верхний знак соответствует зоне проскальзывания, в которой сдвиговое напряжение  $\tau$  принимает положительные значения. Решение уравнения (18) имеет вид:

$$p^{\text{ск}} = \frac{u_{\max}}{Z_{0u}} - \frac{f^2Z_{1u}^2}{2RZ_{0u}^3} + \frac{Z_{2u}}{RZ_{0u}^2} \pm \frac{fZ_{1u}}{2RZ_{0u}^2} x - \frac{x^2}{2RZ_{0u}} + C_1^{\text{ск}} \exp(k_1 x) + C_2^{\text{ск}} \exp(k_2 x). \quad (18)$$

Множители  $k_1$  и  $k_2$  определяются соотношениями:

$$k_1 = \frac{1}{2Z_{2u}} \left( \mp fZ_{1u} + \sqrt{f^2Z_{1u}^2 - 4Z_{0u}Z_{2u}} \right);$$

$$k_2 = \frac{1}{2Z_{2u}} \left( \mp fZ_{1u} - \sqrt{f^2Z_{1u}^2 - 4Z_{0u}Z_{2u}} \right).$$

Таким образом, для получения решения контактной задачи в явном виде требуется определить восемь констант интегрирования (четыре для зоны сцепления и по две для двух зон проскальзывания); четыре координаты ( $a, b, c, d$ ), определяющие границы зон сцепления и проскальзывания. В дальнейшем максимальное вертикальное смещение  $u_{\max}$  будем считать заданным. Для нахождения перечисленных величин используем следующие условия.

На границах зоны сцепления должны выполняться требования неразрывности контактного давления  $p$  и сдвигового контактного напряжения  $\tau$ :

$$p^{\text{скI}} \Big|_{x=c} = p^{\text{сц}} \Big|_{x=c}; \quad \tau^{\text{скI}} \Big|_{x=c} = \tau^{\text{сц}} \Big|_{x=c}; \quad (19)$$

$$p^{\text{скII}} \Big|_{x=b} = p^{\text{сц}} \Big|_{x=b}; \quad \tau^{\text{скII}} \Big|_{x=b} = \tau^{\text{сц}} \Big|_{x=b}. \quad (20)$$

Верхний индекс «скI» означает, что соответствующая величина определена в первой зоне проскальзывания; индекс «скII» — во второй.

Также на границах зоны сцепления выполняются условия неразрывности производных от величин  $p$  и  $\tau$  по координате  $x$ :

$$\left. \frac{dp^{ckl}}{dx} \right|_{x=c} = \left. \frac{dp^{cu}}{dx} \right|_{x=c}; \quad \left. \frac{d\tau^{ckl}}{dx} \right|_{x=c} = \left. \frac{d\tau^{cu}}{dx} \right|_{x=c};$$

$$\left. \frac{dp^{ckll}}{dx} \right|_{x=b} = \left. \frac{dp^{cu}}{dx} \right|_{x=b}; \quad \left. \frac{d\tau^{ckll}}{dx} \right|_{x=b} = \left. \frac{d\tau^{cu}}{dx} \right|_{x=b}. \quad (21)$$

Кроме того, на границах зоны сцепления выполняется условие неразрывности горизонтального смещения  $w$ :

$$w^{ckl} \Big|_{x=c} = w^{cu} \Big|_{x=c}; \quad w^{ckll} \Big|_{x=b} = w^{cu} \Big|_{x=b}. \quad (22)$$

На границах области контакта давление  $p$  должно быть равно нулю:

$$p^{ckl} \Big|_{x=d} = p^{ckll} \Big|_{x=a} = 0. \quad (23)$$

Условия (19)–(23) позволяют составить систему из двенадцати нелинейных уравнений для определения двенадцати неизвестных  $C_1^{cu}, C_2^{cu}, C_3^{cu}, C_4^{cu}, C_1^{ckl}, C_2^{ckl}, C_1^{ckll}, C_2^{ckll}, a, b, c, d$ .

Таким образом, разработанная методика подразумевает выполнение следующих операций.

1. Составляются аналитические выражения для контактного давления и сдвигового напряжения в области сцепления (14) и проскальзывания (16), (18).

2. Составляется и решается система из двенадцати нелинейных уравнений (19)–(23) для определения констант интегрирования, входящих в функции (14), (16), (18), и границ зон сцепления и проскальзывания.

3. После определения всех констант и координат устанавливается явный вид функций (14) и (18). Затем может быть определена вертикальная сила  $P$  по формуле

$$P = L \int_d^a p dx = L \left( \int_d^c p^{ckl} dx + \int_c^b p^{cu} dx + \int_b^a p^{ckll} dx \right). \quad (24)$$

4. Зная зависимости контактных напряжений от координаты  $x$ , по формулам (10) устанавливается распределение компонент упругого смещения по толщине деформируемого обода.

Если в правых частях уравнений (11) оставить только первые слагаемые, то получим соотношения, соответствующие упрощенной модели Винклера основания. При этом во всей области контакта распределение контактного давления определяется следующим образом:

$$p_V = \frac{1}{Z_{0u}} \left( u_{\max} - \frac{x^2}{2R} \right).$$

Максимальное контактное давление, полуширина области контакта и вертикальная нагрузка при заданном максимальном смещении определяются соотношениями:

$$p_{\max V} = \frac{u_{\max}}{Z_{0u}}; \quad a_V = \sqrt{2Ru_{\max}}; \quad P_V = \frac{2La_V^3}{3Z_{0u}R}. \quad (25)$$

Индекс « $V$ » означает, что соответствующая характеристика определена в рамках модели Винклера основания.

Если весь цилиндр образован упругим материалом, то для описания контактного взаимодействия при пренебрежении трением в области контакта можно использовать известное решение Герца [9] для полуплоскости. В соответствии с данным решением распределение контактного давления имеет вид

$$p_{\infty} = p_{\max \infty} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a_{\infty}^2}}.$$

где  $p_{\max \infty}, a_{\infty}$  — максимальное давление и полуширина области контакта, определенные для сплошного упругого цилиндра. Данные величины, а также вертикальная нагрузка  $P_{\infty}$  при заданном максимальном смещении  $u_{\max}$  определяются по формулам:

$$p_{\max \infty} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{u_{\max}}{R}}; \quad a_{\infty} = \sqrt{Ru_{\max}};$$

$$P_{\infty} = \frac{\pi L E u_{\max}}{4(1-\nu^2)}. \quad (26)$$

Точное решение краевых задач теории упругости для слоя произвольной толщины подразумевает применение интегрального преобразования Фурье [1, 2]. Примеры использования данных решений для описания контактного взаимодействия тел, имеющих упруго деформируемые покрытия, приведены, в частности, в [8]. В рассматриваемом случае вертикального смещения цилиндра с деформируемым ободом (см. рисунок 1) при пренебрежении трением в области контакта ( $f = 0$ ) для давления  $p$  можно составить уравнение

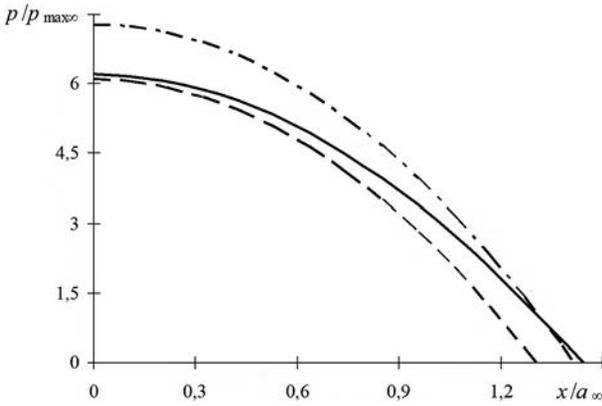
$$u_{\max} - \frac{x^2}{2R} = \frac{\chi + 1}{4G_{xz}} \pi \int_{d_1}^{a_1} p_1(y) K \left( \frac{x-y}{h} \right) dy. \quad (27)$$

где  $\chi = 3 - 4\nu$ . Функция влияния  $K(x)$  задается следующим образом:

$$K(x) = \int_0^{\infty} \frac{4\beta - 2\chi \operatorname{sh}(2\beta)}{(\chi + 1)^2 + 4\beta^2 + 4\chi \operatorname{sh}^2 \beta} \frac{\cos(x\beta)}{\beta} d\beta.$$

Нижний индекс « $I$ » означает, что соответствующая величина определена в результате решения интегрального уравнения (27). Координаты  $d_1$  и  $a_1$  определяются из условия равенства нулю давления  $p_1(x)$ . Численные интегрирование для функции влияния  $K(x)$  и решение интегрального уравнения (27) реализованы в программной среде MathCad. После определения распределения контактного давления  $p_1(x)$  вычисляется соответствующая вертикальная сила  $P_I$ :

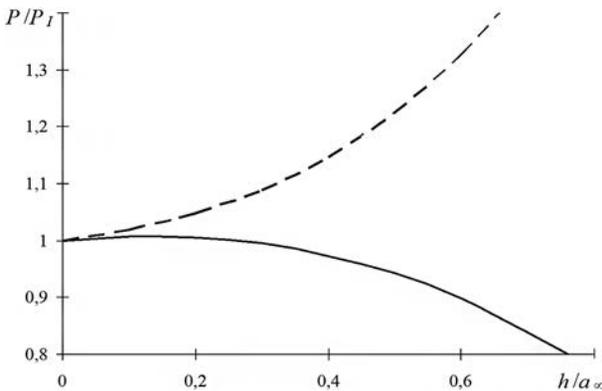
$$P_I = L \int_{d_1}^{a_1} p_1 dx. \quad (28)$$



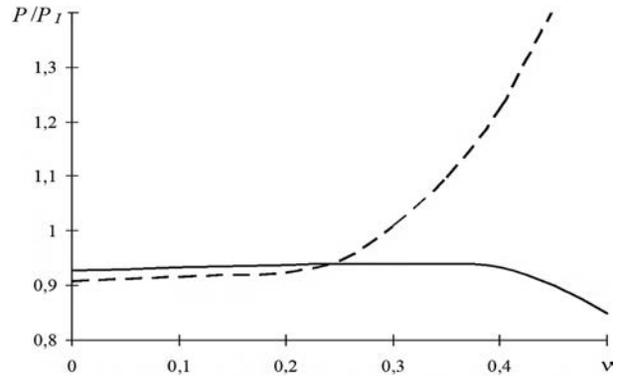
**Рисунок 2** — Расчетные эпюры контактного давления при значении коэффициента Пуассона  $\nu = 0,4$  и относительной толщине деформируемого обода  $h/a_\infty = 0,35$ : сплошная кривая — результат решения интегрального уравнения (28); пунктирная — результат использования разработанной методики; штрихпунктирная — использование модели Винклера основания  
**Figure 2** — Calculation diagrams of contact pressure with Poisson's ratio value  $\nu = 0.4$  and relative thickness of the deformable rim  $h/a_\infty = 0.35$ : solid curve — result of the solution of the integrated equation (28); dashed curve — result of use of the developed method; dash-dotted curve — use of Winkler base model

**Результаты расчета.** На рисунке 2 представлены эпюры контактного давления, определенные с использованием различных расчетных методик. Координата  $x$  отнесена к полуширине области контакта  $a_\infty$ , определенной в соответствии с решением Герца (26) для сплошного деформируемого цилиндра. Контактное давление отнесено к максимальному давлению  $p_{\max\infty}$ , также определяемому по формулам (26). Можно отметить, что разработанная методика обеспечивает более точные расчетные оценки параметров контакта, чем модель Винклера основания.

Как и следовало ожидать, погрешность результатов использования этой методики возрастает с увеличением толщины  $h$  (рисунок 3). На рисунке 3 вертикальная сила  $P$ , определяемая на основе разработанной методики и модели Винклера основания, отнесена к соответствующей силе  $P_I$ ,

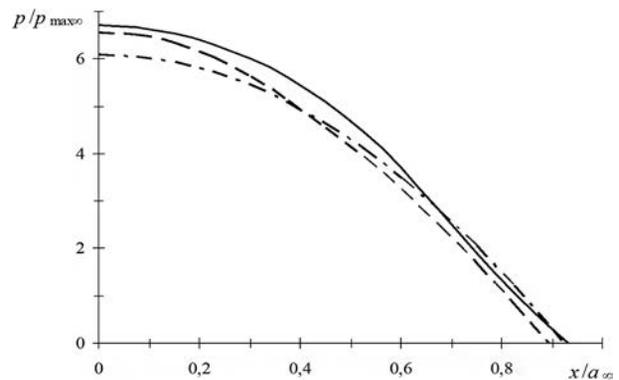


**Рисунок 3** — Зависимость относительной вертикальной силы от относительной толщины деформируемого обода при  $\nu = 0,4$ : сплошная кривая — результаты использования разработанной методики; пунктирная — модели Винклера основания  
**Figure 3** — Dependence of relative vertical force on the relative thickness of the deformable rim with  $\nu = 0.4$ : solid curve — results of using the developed method; dashed curve — Winkler base model



**Рисунок 4** — Зависимость относительной вертикальной силы от коэффициента Пуассона материала деформируемого обода. Обозначения кривых те же, что и для рисунка 3  
**Figure 4** — Dependence of relative vertical force on a Poisson's ratio of the deformable rim material. Designations of curves are the same as for Figure 3

определяемой после решения интегрального уравнения (27) по формуле (28). В диапазоне значений коэффициента Пуассона материала деформируемого слоя от 0 до 0,25 использование разработанной методики приводит к несколько заниженным оценкам эквивалентной вертикальной жесткости моделируемого объекта (значение вертикальной силы  $P$  при заданном смещении  $u_{\max}$ ). При этом погрешность прогноза силы  $P$  практически не зависит от самого значения коэффициента  $\nu$  и при  $h/a_\infty = 0,5$  составляет 6 % для разработанной методики, а для модели Винклера основания — 10 % (рисунок 4). В диапазоне  $\nu > 0,3$  расчетные значения вертикальной силы, определенные на основе модели Винклера основания, оказываются выше соответствующих значений, полученных после решения интегрального уравнения (27). С дальнейшим увеличением коэффициента Пуассона погрешность модели Винклера основания существенно возрастает. Расчетные оценки, полу-



**Рисунок 5** — Расчетные эпюры контактного давления при значении коэффициента Пуассона  $\nu = 0,4$  и относительной толщине деформируемого обода  $h/a_\infty = 0,5$ , определенные на основе разработанной методики: сплошная кривая — для значения коэффициента трения  $f = 0,5$ ; пунктирная —  $f = 0,1$ ; штрихпунктирная —  $f = 0$   
**Figure 5** — Calculation diagrams of contact pressure with Poisson's ratio value  $\nu = 0.4$  and the relative thickness of the deformable rim  $h/a_\infty = 0.5$ , defined on the basis of the developed method: solid curve — for value of coefficient of friction  $f = 0.5$ ; dashed curve —  $f = 0.1$ ; dash-dotted curve —  $f = 0$

чаемые в рамках разработанной методики, во всем диапазоне изменения коэффициента Пуассона являются заниженными. При этом заметное увеличение погрешности расчета силы  $P$  происходит только при  $\nu > 0,4$ . При  $\nu = 0,45$  и  $h/a_\infty = 0,5$  эта погрешность составляет 11 %.

Разработанная методика позволяет учесть влияние трения в области контакта на характер распределения контактного давления при вертикальном смещении моделируемого объекта. Так, на рисунке 5 представлены расчетные эпюры давления, полученные на основе данной методики при различных значениях коэффициента трения  $f$ . Можно отметить, что с увеличением коэффициента трения максимальное значение контактного давления увеличивается. Скорость повышения давления  $p_{\max}$  с увеличением  $f$  выше в диапазоне малых значений коэффициента трения ( $f < 0,2$ ). На рисунке 6 максимальное контактное давление  $p_{\max}$  при данном значении коэффициента трения  $f$ , определенное на основании разработанной методики, отнесено к соответствующему значению  $p_{\max 0}$ , вычисленному на основе разработанной методики при пренебрежении трением в области контакта ( $f = 0$ ). Отношение максимальных напряжений  $p_{\max}/p_{\max 0}$  с увеличением толщины деформируемого обода увеличивается.

При рассматриваемом режиме нагружения эпюры контактного давления будут симметричны относительно вертикальной оси  $x = 0$ , а эпюры сдвиговых контактных напряжений — антисимметричны относительно этой оси. Сдвиговое напряжение  $\tau$  принимает максимальное значение на границе раздела зон сцепления и проскальзывания (рисунок 7). В зоне сцепления зависимость  $\tau$  от координаты  $x$  близка к линейной. Рассчитанные по разработанной методике сдвиговые контактные напряжения в диапазонах значений коэффициента Пуассона материала обода от 0 до 0,25 и от 0,25 до 0,5 имеют разные знаки.

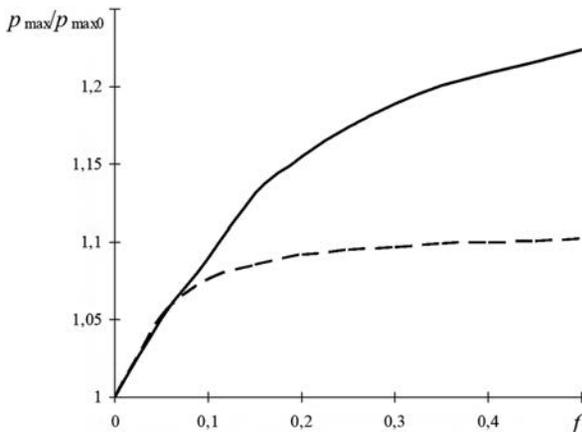


Рисунок 6 — Зависимость относительного максимального контактного давления от коэффициента трения: сплошная кривая — при  $h = 0,2a_\infty$ ; пунктирная — при  $h = 0,6a_\infty$   
 Figure 6 — Dependence of relative maximum contact pressure on coefficient of friction: solid curve — with  $h = 0.2a_\infty$ ; dashed curve — with  $h = 0.6a_\infty$

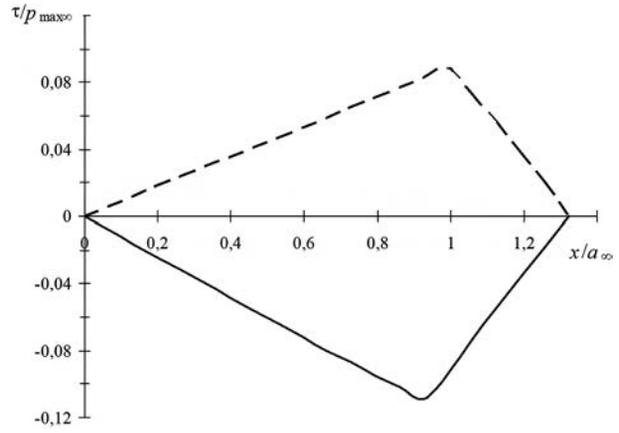


Рисунок 7 — Эпюры сдвигового контактного напряжения при  $h = 0,4a_\infty$  и  $f = 0,2$ : сплошная кривая — для  $\nu = 0,4$ ; пунктирная — для  $\nu = 0,1$   
 Figure 7 — Diagrams of the shear contact stress with  $h = 0.4a_\infty$  and  $f = 0.2$ : solid curve — for  $\nu = 0.4$ ; dashed curve — for  $\nu = 0.1$

Как было отмечено выше, разработанная методика позволяет не только определить контактные напряжения, но и установить явный вид распределения смещений  $u_x$  и  $u_z$  в деформируемом ободе. Используя затем уравнения (1), определим распределения компонент тензора напряжений. В соответствии с критерием Мизеса [10], прочность материала определяется максимальным значением интенсивности тензора напряжений  $\sigma_u$ . Величина  $\sigma_u$  выражается через компоненты тензора напряжений следующим образом

$$\sigma_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{yy})^2 + 6(\sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{xy}^2)}$$

На рисунке 8 представлены расчетные распределения  $\sigma_u$  по толщине деформируемого обода на линии действия вертикальной силы ( $x = 0$ ). Можно отметить, что максимум интенсивности тензора

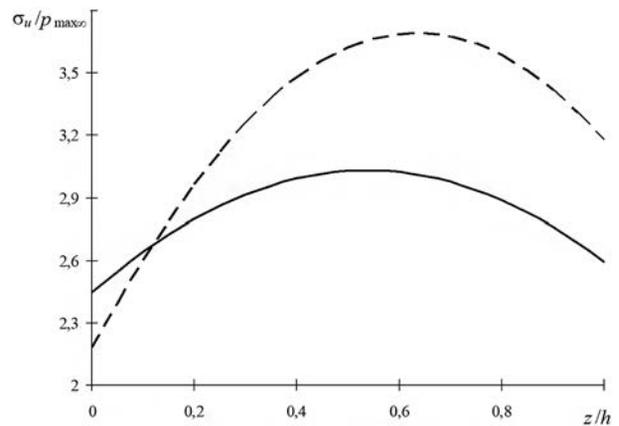


Рисунок 8 — Распределение интенсивности тензора напряжений по толщине деформируемого обода при  $x = 0$ ,  $\nu = 0,4$  и  $h = 0,4a_\infty$ : сплошная кривая — для  $f = 0,4$ ; пунктирная — для  $f = 0,04$   
 Figure 8 — Distribution of stress tensor intensity on the deformable rim thickness with  $x = 0$ ,  $\nu = 0.4$  and  $h = 0.4a_\infty$ : solid curve —  $f = 0.4$ ; dashed curve —  $f = 0.04$

напряжений достигается на некотором расстоянии от поверхности контакта. Координата, соответствующая максимуму интенсивности, и само максимальное значение  $\sigma_{\text{imax}}$  зависят от коэффициента трения. При этом увеличение  $f$  сопровождается снижением значения  $\sigma_{\text{imax}}$ .

**Заключение.** Разработана методика решения контактных задач для жестких тел качения с деформируемым ободом, основанная на асимптотическом приближении точного решения краевой задачи теории упругости для тонкой бесконечной полосы. В диапазоне значений толщины обода менее 0,5 полуширины области контакта погрешность результатов использования разработанной методики не превышает 11 % от соответствующих расчетных оценок, полученных в рамках точного решения для полосы произвольной толщины. Установлено, что для материалов, коэффициент Пуассона которых менее 0,4, погрешность расчетов практически не зависит от самого значения  $\nu$ . При  $\nu > 0,4$  данная погрешность возрастает с увеличением коэффициента Пуассона материала обода. Показано, что разработанная методика позволяет получить аналитические выражения для контактного давления и сдвигового контактного напряжения в зонах сцепления и проскальзывания. Также получены выражения, описывающие распределение интенсивности тензора напряжений в деформируемом ободе. Установлено, что увеличение коэффициента трения между деформируемым ободом и опорной поверхностью приводит к увеличению максимального контактного давления и снижению максимального значения интенсивности тензора напряжений.

## Список литературы

1. Новацкий, В. Теория упругости / В. Новацкий; пер. с польск. Б.Е. Победри. — М.: Мир, 1975. — 872 с.
2. Александров, В.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками / В.М. Александров, С.М. Мхитарян; под ред. Н.Х. Арутюняна. — М.: Наука, 1983. — 487 с.
3. Fabrikant, V.I. Solution of contact problems for a transversely isotropic elastic layer bounded to an elastic half-space / V.I. Fabrikant // Proc. of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. — 2009. — Vol. 223, iss. 11. — Pp. 2487–2499. — DOI: <https://doi.org/10.1243/09544062JMES1643>.
4. Argatov, I.I. Depth-sensing indentation of a transversely isotropic elastic layer: Second-order asymptotic models for canonical indenters / I.I. Argatov // Int. J. of Solids and Structures. — 2011. — Vol. 48, iss. 25–26. — Pp. 3444–3452. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.08.011>.
5. Можаровский, В.В. Методика определения параметров контакта индентора с ортотропным покрытием на упругом изотропном основании / В.В. Можаровский, Д.С. Кузьменков // Проблемы физики, математики и техники. — 2016. — № 4(29). — С. 74–81.
6. Aleksandrov, V.M. Asymptotic solution of the contact problem for a thin elastic layer / V.M. Aleksandrov // J. Appl. Math. Mech. — 1969. — Vol. 33, iss. 1. — Pp. 49–63. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(69\)90113-0](https://doi.org/10.1016/0021-8928(69)90113-0).
7. Jaffar, M.J. Asymptotic behaviour of thin elastic layers bonded and unbonded to a rigid foundation / M.J. Jaffar // Int. J. Mech. Sci. — 1989. — Vol. 31, iss. 3. — Pp. 229–235. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(89\)90113-6](https://doi.org/10.1016/0020-7403(89)90113-6).
8. Можаровский, В.В. Прикладная механика слоистых тел из композитов: плоские контактные задачи / В.В. Можаровский, В.Е. Старжинский. — Минск: Наука и техника, 1988. — 271 с.
9. Johnson, K.L. Contact mechanics / K.L. Johnson. — Cambridge: Cambridge University Press, 1985. — 510 p. — DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9781139171731>.
10. Старовойтов, Э.И. Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости / Э.И. Старовойтов. — Гомель: БелГУТ, 2001. — 342 с.

CHERNOUS Dmitry A., Ph. D. in Eng., Assoc. Prof.

Associate Professor of the Department “Technical Physics and Theoretical Mechanics”<sup>1</sup>

E-mail: tm@bsut.by

KADNIANKA Alena V.

Engineer for Scientific and Technical Information of the Department of Scientific and Technical Information<sup>2</sup>

E-mail: onti@sipr.by

<sup>1</sup>Belarusian State University of Transport, Gomel, Republic of Belarus

<sup>2</sup>JSC “Soligorsk Institute of Resources Saving Problems with Pilot Production”, Soligorsk, Republic of Belarus

Received 25 August 2022.

## ASYMPTOTIC APPROACH TO SOLVING THE CONTACT PROBLEM FOR A ROLLING BODY WITH A THIN DEFORMABLE RIM

*On the basis of an asymptotic approach to solving the elasticity theory boundary value problem for a thin strip rigidly linked to a non-deformable base, the differential equations are derived for determining the normal and shear loads distributed on the strip face free from fastening. These equations are used to solve the contact problem for a rigid cylinder with a thin elastic rim with a non-deformable horizontal rough support surface. The cylinder loading by a vertical force is considered for a given cylinder center settling. The calculated diagrams of contact pressure and shear contact stresses are obtained. In contrast to the previously used methods, the developed technique makes it possible to take into account the presence of adhe-*

sion and slip zones in the contact area, as well as to use a mathematically strict solution of the constitutive equations for contact pressure and shear contact stress. The value of the vertical force acting on the rigid cylinder for a given cylinder center displacement is determined. The stress tensor intensity distribution in the rim is established. The results of the developed technique application are compared with the calculated estimates obtained on the basis of the exact solution of the boundary value problem for a strip of arbitrary thickness and within the method, involving the use of the Winkler base simplified model. The dependences of the results error for the developed method on the thickness and Poisson's ratio of the rim material are obtained. The paper describes the effect of the rim-support surface friction coefficient on the contact pressure, shear contact pressure, and the maximum intensity of the stress tensor in the rim. It is concluded that it is reasonable to use the developed technique at solving contact problems for rolling elements with a relatively thin elastic rim.

**Keywords:** contact problem, thin layer, asymptotic approximation, contact pressure, shear contact pressure, stress tensor intensity

DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2023-1-62-79-87>

## References

1. Nowacki W. *Teoria sprężystości*. Warszawa, Państwowe wydawnictwo naukowe, 1970.
2. Aleksandrov V.M., Mkhitarian S.M. *Kontaktnye zadachi dlya tel s tonkimi pokrytiami i prosloykami* [Contact problems for solids with thin coatings and layers]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 487 p. (in Russ.).
3. Fabrikant V.I. Solution of contact problems for a transversely isotropic elastic layer bounded to an elastic half-space. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of mechanical engineering science*, 2009, vol. 223, iss. 11, pp. 2487–2499. DOI: <https://doi.org/10.1243/09544062JMES1643>.
4. Argatov I.I. Depth-sensing indentation of a transversely isotropic elastic layer: Second-order asymptotic models for canonical indenters. *International journal of solids and structures*, 2011, vol. 48, iss. 25–26, pp. 3444–3452. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.08.011>.
5. Mozharovsky V.V., Kuzmenkov D.S. Metodika opredeleniya parametrov kontakta indentora s ortotropnym pokrytiem na uprugom izotropnom osnovanii [The technique for determining the parameters of a contact for indenter with the orthotropic coating on the elastic isotropic substrate]. *Problems of physics, mathematics and technics*, 2016, no. 4(29), pp. 74–82 (in Russ.).
6. Aleksandrov V.M. Asymptotic solution of the contact problem for a thin elastic layer. *Journal of applied mathematics and mechanics*, 1969, vol. 33, iss. 1, pp. 49–63. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(69\)90113-0](https://doi.org/10.1016/0021-8928(69)90113-0).
7. Jaffar M.J. Asymptotic behaviour of thin elastic layers bonded and unbonded to a rigid foundation. *International journal of mechanical sciences*, 1989, vol. 31, iss. 3, pp. 229–235. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(89\)90113-6](https://doi.org/10.1016/0020-7403(89)90113-6).
8. Mozharovskiy V.V., Starzhinskiy V.E. *Prikladnaya mekhanika sloistykh tel iz kompozitov. Ploskie kontaktnye zadachi* [Applied mechanics of layered composite solids: plane contact problems]. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1988. 271 p. (in Russ.).
9. Johnson K.L. *Contact mechanics*. Cambridge, Cambridge University Press, 1985. 510 p. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9781139171731>.
10. Starovoytov E.I. *Osnovy teorii uprugosti, plastichnosti i vyazkoupругosti* [Foundations of theory of elasticity, plasticity and viscoelasticity]. Gomel, Belorusskiy gosudarstvennyy universitet transporta Publ., 2001. 344 p. (in Russ.).