



ГЕОМЕХАНИКА

УДК 539.3;539.422.23;622.83

М.А. ЖУРАВКОВ, д-р физ.-мат. наук, проф.
заведующий кафедрой «Теоретическая и прикладная механика»¹
E-mail: zhuravkov@bsu.by

М.А. НИКОЛАЙЧИК, магистр физ.-мат. наук
заведующий НИЛ «Прикладная механика»¹
E-mail: nikolaitchik.m@gmail.com

Шици ЧЖАН
магистрант механико-математического факультета¹
E-mail: shiqizhang177@gmail.com

¹Белорусский государственный университет, г. Минск, Республика Беларусь

Поступила в редакцию 25.05.2023.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОДНОГО ТИПА БЛОЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ЗАДАЧ ПОДЗЕМНОЙ ГЕОМЕХАНИКИ

В работе приведена процедура построения механико-математических моделей для описания напряженно-деформированного состояния одного типа блочного элемента с учетом его собственного деформирования. На базе данного типа блочного элемента представляется перспективным построить реализацию метода дискретных элементов для моделирования механического состояния породных массивов в областях нарушения гипотезы сплошности. Введенный блочный элемент может быть использован как для задач при статическом нагружении, так и в случае динамических задач.

Ключевые слова: численные методы, механика деформируемого твердого тела, метод дискретных элементов, подземная геомеханика, деформируемый блочный элемент, континуально-дискретные модели

DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2023-3-64-73-82>

Введение. В настоящее время при решении задач подземной геомеханики все более активно начинают использоваться совместные континуально-дискретные модели (гибридные численные модели, сопряженные методы) [1–7]. Такой подход обусловлен тем, что континуальные методы, основанные на понятии сплошности, достаточно сложно применять при рассмотрении, например, областей массива горных пород с явно выделенной блочной структурой или зон трещиноватости, в то время как дискретные методы, допускающие нарушения гипотезы сплошности, весьма неэффективны для изучения поведения массивов горных пород на стадии «предразрушения» [7].

Сопряженные методы базируются на преимуществах каждого из составляющих методов и нивелируют их недостатки. Так, при моделировании процессов поведения геоматериалов на стадиях до и после разрушения сопряженный метод должен быть в состоянии рассматривать все стадии поведения материала. Например, при исследовании напряженно-деформированного состояния (НДС) областей массива горных пород, находящихся на значительных расстояниях от подземного сооружения, используются континуальные численные методы, например, метод конечных элементов (МКЭ), метод граничных элементов (МГЭ). Поведение областей массива, находящихся в окрест-

ности контура подземного сооружения, моделируется на основе различных модификаций метода дискретных элементов (МДЭ), позволяющих напрямую учесть трещиноватость, блочную структуру таких областей [8, 9].

Рассмотрим модельные задачи, которые входят в перечень базовых для построения общих моделей, позволяющих исследовать деформационные процессы и состояние массивов горных пород в областях образования блочных (дискретных) структур. Применительно к массивам горных пород, которые в первоначальном состоянии можно рассматривать в рамках механики сплошных сред (МСС), рассматривается НДС массива горных пород в областях, где он находится в состоянии образования явной блочной структуры [9, 10]. В первую очередь это, например, области разрушения в окрестности подземных выработок, зоны наведенной трещиноватости и другие области.

Если рассматривать произвольную структуру «блочной упаковки» массивов горных пород в областях нарушения сплошности, то такая структура имеет множество степеней свободы. С математической точки зрения решать такую задачу в общем случае весьма сложно. Поэтому в первом приближении нерегулярная упаковка блоков произвольной геометрии и с различными связями между блоками может быть заменена приведенной регулярной упаковкой. Под термином «приведенная» понимаем структуру, «макросвойства» и реакция на внешние воздействия которой эквивалентны исходной нерегулярной упаковке.

При таком определении приведенной регулярной упаковки ее параметры можно определять не теоретически, а из опытов путем калибровки модели, используя данные натуральных измерений для реальных массивов горных пород, находящихся в исследуемых структурных состояниях.

Итак, представляем область нарушения сплошности массива горных пород как регулярную упаковку блоков. В базовых реализациях методов дискретных элементов рассматриваются варианты, когда деформации в блочной структуре происходят только вследствие деформации связей между отдельными элементами, при этом сами элементы моделируются как твердые тела [11]. Более сложным является вариант, когда допускается деформирование отдельных элементов блоков. В этом случае для расчета НДС рекомендуется строить алгоритмы, основанные на континуальных методах, в частности, на использовании МКЭ.

Рассмотрим иной подход к учету деформирования отдельных блоков — представление блока как системы, состоящей из нескольких внутренних твердых элементов, соединенных между собой связями (рисунок 1).

Таким образом, деформация блока происходит вследствие деформации связей между элемента-

ми, которые в этом случае рассматриваются как твердые тела.

Замечание. В этом случае вся область нарушения сплошности представляет систему таких блочных элементов, соединенных между собой определенными связями. То есть для моделирования области разрушения или трещиноватости в массиве горных пород такие блочные элементы следует разместить по всей области нарушения сплошности.

На форму отдельных элементов в общей структуре блока вводим следующие ограничения: форма элементов симметрична. При этом элементы могут быть различных форм и размеров. Такие же ограничения накладываем и на связи между элементами: в общей структуре связи i -го элемента с соседними являются симметричными.

Итак, в качестве базовой модельной задачи рассматривается следующая задача: исследуется состояние плоской структуры (дискретного элемента, блока), состоящей из внутренних элементов произвольной геометрии, соединенных между собой упругими или упруго-вязкими связями (см. рисунок 1). Дискретный элемент находится под воздействием внешней нагрузки.

Первая модельная задача. Исследуем состояние блока, изображенного на рисунке 1, в случае, когда $m_i = m$, $i = 1, 4$. Связи между внутренними элементами рассматриваем как упругие, жесткость всех пружин равна k . Элементы представляют собой твердые тела (материальные массы). Горизонтальное и вертикальное расстояние между центрами масс элементов при ненапряженных упругих связях составляет l . Верхние элементы при деформировании блока смещаются на одинаковую величину x_1 , а два нижних — на x_2 в направлении горизонтальной оси X (рисунок 2).

Замечание. Очевидно, что рассмотрение только упругих связей между элементами не позволяет корректно моделировать поведение реального объекта на больших интервалах времени. В этом случае необходимо введение связей, моделирующих эффекты потери энергии, вследствие

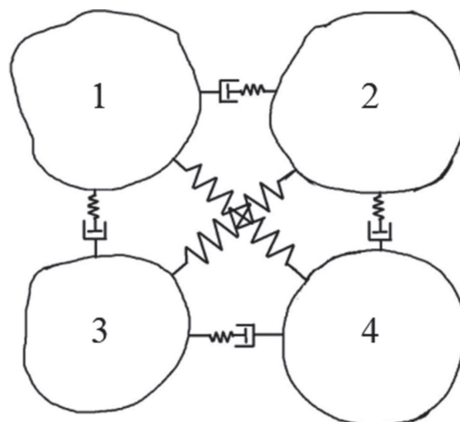


Рисунок 1 — Структура отдельного блочного элемента
Figure 1 — Structure of a separate block element

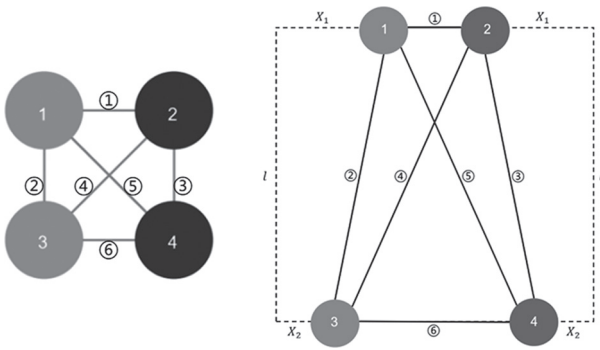


Рисунок 2 — Принципиальная расчетная схема первой модельной задачи
Figure 2 — Basic design scheme of the first model problem

наличия сил трения. Вместе с тем, моделирование поведения среды за малые промежутки времени представляется достаточно корректным с использованием только упругих связей между твердыми элементами.

Для построения аналитического решения сформулированной задачи воспользуемся классическим уравнением Лагранжа второго рода [12]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, 4}, \quad (1)$$

где $L = T - \Pi$ — функция Лагранжа.

Найдем явный вид функции Лагранжа. Кинетическая энергия системы равна:

$$T = \sum_{i=1}^4 T_i = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 = m \dot{x}_1^2 + m \dot{x}_2^2. \quad (2)$$

Потенциальная энергия системы определяется потенциальной энергией упругих связей (пружин):

$$\Pi = \sum_{j=1}^6 \frac{k}{2} \Delta l_j^2, \quad (3)$$

где Δl_j — смещения пружин (растяжение-сжатие). Из геометрических соображений:

$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= l - (l - x_1 - x_1) = 2x_1; \\ \Delta l_2 &= \Delta l_3 = l - \sqrt{l^2 + (x_1 - x_2)^2}; \\ \Delta l_4 &= \Delta l_5 = l - \sqrt{l^2 + (l - 2x_1 + x_1 - x_2)^2} = \\ &= l - \sqrt{l^2 + (l - x_1 - x_2)^2}; \\ \Delta l_6 &= l - (l - x_2 - x_2) = 2x_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Тогда из (3), воспользовавшись (4), после введения подобных слагаемых получаем:

$$\Pi = \frac{k}{2} \left(6x_1^2 + 6x_2^2 + 5l^2 - 2l(x_1 + x_2) - 2l\sqrt{l^2 + (x_1 - x_2)^2} - 2l\sqrt{l^2 + (l - x_1 - x_2)^2} \right). \quad (5)$$

В итоге функция Лагранжа записывается так:

$$L = m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{2} \left(6x_1^2 + 6x_2^2 + 5l^2 - 2l(x_1 + x_2) - 2l\sqrt{l^2 + (x_1 - x_2)^2} - 2l\sqrt{l^2 + (l - x_1 - x_2)^2} \right). \quad (6)$$

Для слагаемых уравнения Лагранжа 2-го рода (1), на основании (6), имеем:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = 2m\ddot{x}_1;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= -\frac{k}{2} \left(12x_1 - 2l - 2l \left(l^2 + (x_1 - x_2)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (2x_1 - 2x_2) + \right. \\ &\quad \left. + 2l \left(l^2 + (l - x_1 - x_2)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} 2(l - x_1 - x_2) \right); \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = 2m\ddot{x}_2;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_2} &= -\frac{k}{2} \left(12x_2 - 2l + 2l \left(l^2 + (x_1 - x_2)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (2x_1 - 2x_2) + \right. \\ &\quad \left. + 2l \left(l^2 + (l - x_1 - x_2)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} 2(l - x_1 - x_2) \right). \end{aligned}$$

Используя (4), уравнение (1) приводится к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} 2m\ddot{x}_1 + \frac{k}{2} \left(12x_1 - 2l - 2l \left(l^2 + (x_1 - x_2)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (2x_1 - 2x_2) + \right. \\ \left. + 2l \left(l^2 + (l - x_1 - x_2)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} 2(l - x_1 - x_2) \right) = 0, \\ 2m\ddot{x}_2 + \frac{k}{2} \left(12x_2 - 2l + 2l \left(l^2 + (x_1 - x_2)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (2x_1 - 2x_2) + \right. \\ \left. + 2l \left(l^2 + (l - x_1 - x_2)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} 2(l - x_1 - x_2) \right) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Рассмотрим различные варианты начальных условий для введенного «элементарного» дискретного элемента.

Вариант 1.1. В качестве первого типа начальных условий принимаем случай, когда один из элементов имеет начальное перемещение по одной из координатных осей, т. е.:

$$\begin{aligned} t = 0, x_i = X; i = 1 \text{ or } 2 \dots \text{ or } 4 \text{ или} \\ t = 0, y_i = Y; i = 1 \text{ or } 2 \dots \text{ or } 4. \end{aligned}$$

В качестве примера на рисунке 3 приведены картины деформирования блока в течение некоторого малого промежутка времени в предположении, что элемент 1 в начальный момент времени получает смещение в горизонтальном направлении: при $t = 0, x_1 = U, \dot{x}_1 = 0, x_2 = 0, \dot{x}_2 = 0$.

На рисунке 4 приведена картина деформирования блока в различные моменты времени, когда

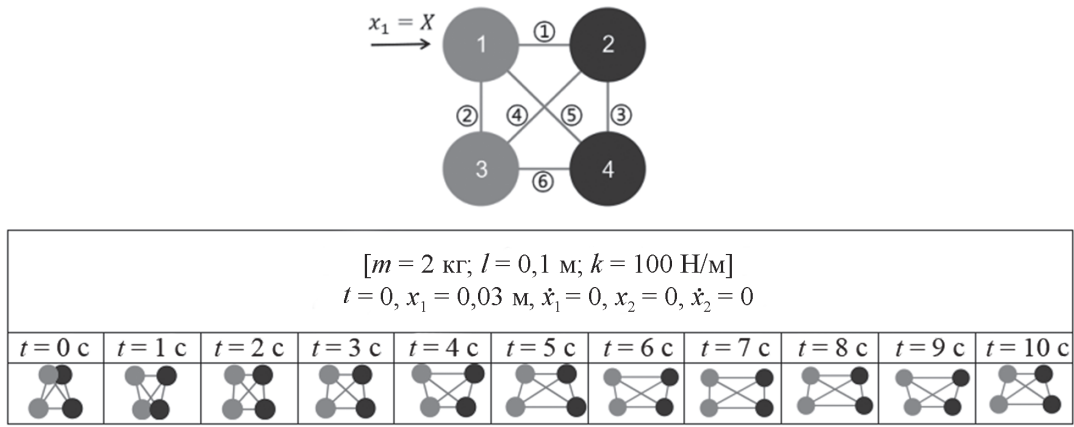


Рисунок 3 — Изменение геометрии блока для варианта 1.1 начальных условий при перемещении в начальный момент времени первого внутреннего элемента в горизонтальном направлении
 Figure 3 — Change in the geometry of the block for option 1.1 of the initial conditions when moving the first internal element in the horizontal direction at the initial moment of time

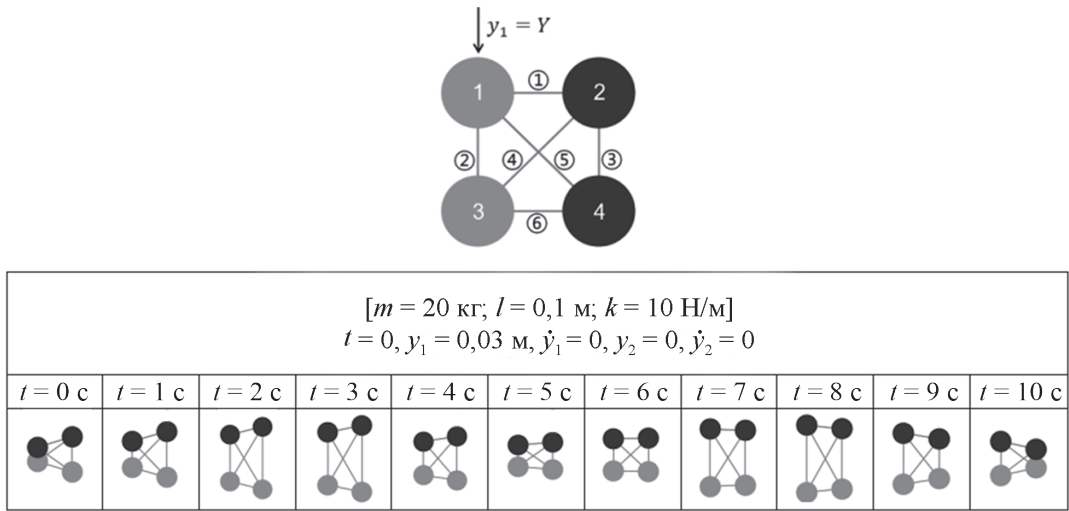


Рисунок 4 — Изменение геометрии блока для варианта 1.1 начальных условий при перемещении в начальный момент времени первого внутреннего элемента в вертикальном направлении
 Figure 4 — Change in the geometry of the block for option 1.1 of the initial conditions when moving the first internal element in the vertical direction at the initial moment of time

элемент 1 в начальный момент времени имеет смещение в вертикальном направлении.

Вариант 1.2. Начальные условия имеют вид: при $t = 0$ один из элементов приобретает начальную скорость, т. е.

$$t = 0, n_i = V; i = 1 \text{ or } 2 \dots \text{ or } 4.$$

На рисунке 5 приведены результаты моделирования состояния системы в предположении, что шар 1 имеет начальную скорость:

$$\text{при } t = 0, x_1 = 0, \dot{x}_1 = 0,5, x_2 = 0, \dot{x}_2 = 0.$$

Вариант 1.3. Начальные условия: на один из элементов действует внешняя нагрузка. Воздействие нагрузки от времени задается в виде треугольного импульса (рисунок 6):

$$F(t) = P(tH(t) - 2(t-1/2)H(t-1/2) + (t-1)H(t-1)), \quad (9)$$

где H — функция Хевисайда [13].

Пусть импульсная нагрузка действует на первый внутренний элемент. В соответствии с теоремой об изменении количества движения:

$$F(t)\Delta t = m(v_1 - v_0).$$

Полагая, что в начальный момент времени скорость первого внутреннего элемента равна нулю ($v_0 = 0$), получаем:

$$v_1 = \frac{F(t)\Delta t + mv_0}{m} = \frac{\int_0^{t_*} F(\tau) d\tau}{m},$$

где t_* — период действия импульсной нагрузки.

Если принять, что $t_* = 1$, то, согласно (9),

$$\int_0^1 F(\tau) d\tau = 0,25.$$

На рисунке 7 приведены графики изменения формы блока во времени.

Вторая модельная задача. Рассмотрим следующую модельную задачу. Как и ранее, изучается

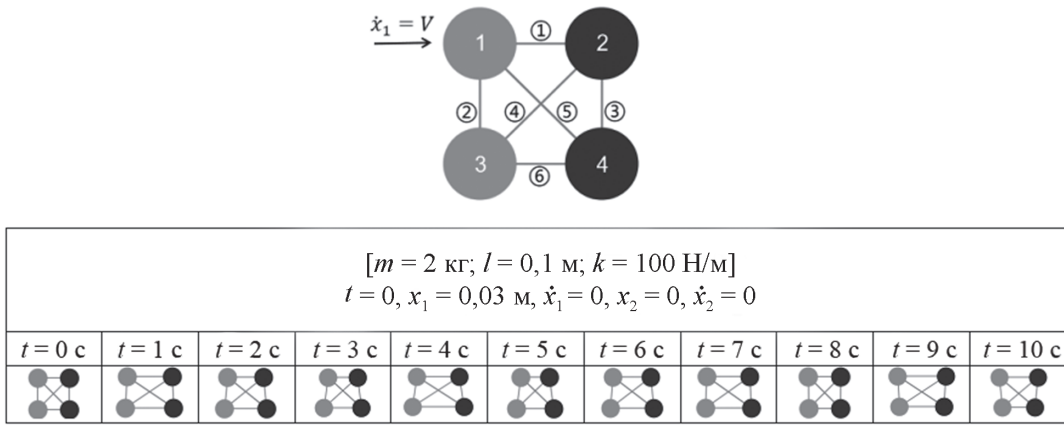


Рисунок 5 — Изменение геометрии блока для варианта 1.2 начальных условий в случае, когда первый внутренний элемент имеет начальную скорость в горизонтальном направлении
 Figure 5 — Change in the geometry of the block for option 1.2 of the initial conditions in the case when the first internal element has an initial velocity in the horizontal direction

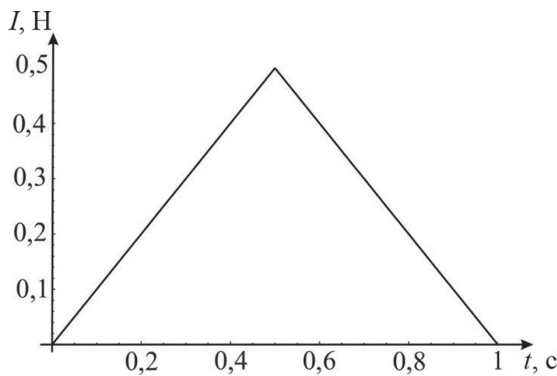


Рисунок 6 — Динамическая нагрузка в виде треугольного импульса

Figure 6 — Dynamic load in the form of a triangular pulse

состояние блока, изображенного на рисунке 1, в случае, когда $m_i = m, i = 1, 4$. Однако в этом случае, помимо упругих связей, между внутренними элементами учитывается наличие еще и демпферов в связях, обозначенных на рисунке 2 как 1, 2, 3 и 6. Внутренние элементы 1–4, как и в предыдущем случае, представляют собой твердые тела. Расстояние между центрами масс внутренних

элементов составляет l . Каждый элемент m_i в системе при общем деформировании среды смещается на величину x_i по направлению горизонтальной оси X (см. рисунок 2).

Как и в первой модельной задаче, определим явный вид функции Лагранжа. Кинетическая энергия системы равна:

$$T = \sum_{i=1}^4 T_i = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_3^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_4^2. \quad (10)$$

Потенциальная энергия системы определяется потенциальной энергией упругих связей (пружин) согласно (3). Из геометрических соображений смещения пружин Δl_i равны:

$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= (x_1 + x_2); \quad \Delta l_2 = \sqrt{l^2 + (x_1 - x_3)^2} - l; \\ \Delta l_3 &= \sqrt{l^2 + (x_2 - x_4)^2} - l; \quad \Delta l_4 = \sqrt{l^2 + (l - x_1 - x_4)^2} - l; \\ \Delta l_5 &= \sqrt{l^2 + (l - x_2 - x_3)^2} - l; \quad \Delta l_6 = (x_3 + x_4). \end{aligned}$$

Тогда выражение для потенциальной энергии (3) приобретает вид:

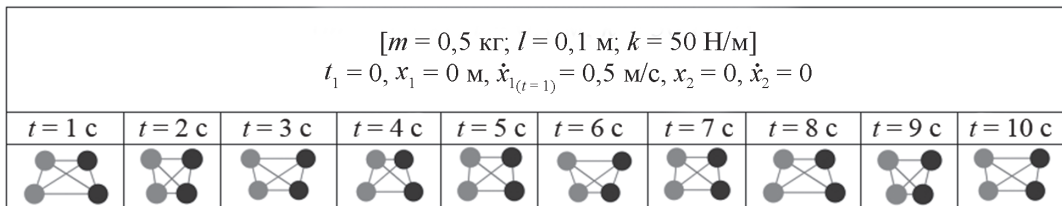
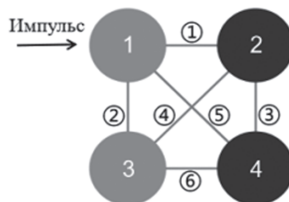


Рисунок 7 — Изменение геометрии блока для варианта 1.3 начальных условий в случае воздействия на первый внутренний элемент нагрузки в виде треугольного импульса типа (9)
 Figure 7 — Change in the geometry of the block for option 1.3 of the initial conditions in the case of impact on the first internal element of the load in the form of a triangular pulse of type (9)

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{k}{2} \left((x_1 + x_2)^2 + \left(\sqrt{l^2 + (x_1 - x_3)^2} - l \right)^2 + \right. \\ & + \left(\sqrt{l^2 + (l - x_2 - x_3)^2} - l \right)^2 + \left(\sqrt{l^2 + (x_2 - x_4)^2} - l \right)^2 + \\ & \left. + \left(\sqrt{l^2 + (l - x_1 - x_4)^2} - l \right)^2 + (x_3 + x_4)^2 \right). \end{aligned} \quad (11)$$

В итоге функция Лагранжа $L = T - \Pi$ записывается так:

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} m (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) - \\ & - \frac{k}{2} \left((x_1 + x_2)^2 + \left(\sqrt{l^2 + (x_1 - x_3)^2} - l \right)^2 + \right. \\ & + \left(\sqrt{l^2 + (x_2 - x_4)^2} - l \right)^2 + \left(\sqrt{l^2 + (l - x_2 - x_3)^2} - l \right)^2 + \\ & \left. + \left(\sqrt{l^2 + (l - x_1 - x_4)^2} - l \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Для учета элементов демпфирования, в уравнение Лагранжа 2-го рода необходимо ввести дополнительные слагаемые, предусматривающие наличие сопротивления среды. Пусть коэффициент демпфирования равен η . Определим такую функцию диссипации G , что сопротивление f среды и функция диссипации G удовлетворяют соотношению вида [14, 15]:

$$f = -\partial G / \partial \dot{x}. \quad (13)$$

Из внешнего вида (13) следует, что функция диссипации G имеет размерность мощности, которая сама по себе отражает скорость потери механической энергии.

С учетом введенных предположений, уравнение Лагранжа 2-го рода можно записать в таком виде:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial G}{\partial \dot{x}_i}, \quad i = \overline{1, 4}, \quad (14)$$

где $G = \sum_{j=1}^6 \frac{\eta}{2} \Delta l_j^2$. В свою очередь:

$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= (\dot{x}_1 + \dot{x}_2); \quad \Delta l_2 = \frac{(x_1 - x_3)(\dot{x}_1 - \dot{x}_3)}{\sqrt{l^2 + (x_1 - x_3)^2}}; \\ \Delta l_3 &= \frac{(x_2 - x_4)(\dot{x}_1 - \dot{x}_4)}{\sqrt{l^2 + (x_2 - x_4)^2}}; \quad \Delta l_6 = (\dot{x}_3 + \dot{x}_4). \end{aligned}$$

Замечание. Напомним, что демпферы присутствуют только в связях, обозначенных на рисунке 2 как 1, 2, 3 и 6.

Тогда:

$$\begin{aligned} G = & \frac{\eta}{2} \left((\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2 + \left(\frac{(x_1 - x_3)(\dot{x}_1 - \dot{x}_3)}{\sqrt{l^2 + (x_1 - x_3)^2}} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{(x_2 - x_4)(\dot{x}_2 - \dot{x}_4)}{\sqrt{l^2 + (x_2 - x_4)^2}} \right)^2 + (\dot{x}_3 + \dot{x}_4)^2 \right). \end{aligned}$$

Вычисляем все слагаемые в (14):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m\ddot{x}_1; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m\ddot{x}_2; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} = m\ddot{x}_3; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_4} = m\ddot{x}_4;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} = & -k \left((x_1 + x_2) + \right. \\ & + \left(\left(l^2 + (x_1 - x_3)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right) \cdot \left(l^2 + (x_1 - x_3)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x_1 - x_3) - \\ & - \left(\left(l^2 + (l - x_1 - x_4)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right) - \\ & \left. - \left(l^2 + (l - x_1 - x_4)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (l - x_1 - x_4) \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_2} = & -k \left((x_1 + x_2) + \right. \\ & + \left(\left(l^2 + (x_2 - x_4)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right) \cdot \left(l^2 + (x_2 - x_4)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x_2 - x_4) - \\ & - \left(\left(l^2 + (l - x_2 - x_3)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right) \cdot \left(l^2 + (l - x_2 - x_3)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (l - x_2 - x_3) \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_3} = & -k \left((x_3 + x_4) - \right. \\ & - \left(\left(l^2 + (x_1 - x_3)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right) \cdot \left(l^2 + (x_1 - x_3)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x_1 - x_3) - \\ & - \left(\left(l^2 + (l - x_2 - x_3)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right) \cdot \left(l^2 + (l - x_2 - x_3)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (l - x_2 - x_3) \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_4} = & -k \left((x_3 + x_4) - \right. \\ & - \left(\left(l^2 + (x_2 - x_4)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right) \cdot \left(l^2 + (x_2 - x_4)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x_2 - x_4) - \\ & - \left(\left(l^2 + (l - x_1 - x_4)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right) \cdot \left(l^2 + (l - x_1 - x_4)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (l - x_1 - x_4) \right); \end{aligned}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \dot{x}_1} = \eta \left((\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + \frac{(x_1 - x_3)^2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_3)}{l^2 + (x_1 - x_3)^2} \right);$$

$$\frac{\partial G}{\partial \dot{x}_2} = \eta \left((\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + \frac{(x_2 - x_4)^2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_4)}{l^2 + (x_2 - x_4)^2} \right);$$

$$\frac{\partial G}{\partial \dot{x}_3} = \eta \left((\dot{x}_3 + \dot{x}_4) - \frac{(x_1 - x_3)^2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_3)}{l^2 + (x_1 - x_3)^2} \right);$$

$$\frac{\partial G}{\partial \dot{x}_4} = \eta \left((\dot{x}_3 + \dot{x}_4) - \frac{(x_2 - x_4)^2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_4)}{l^2 + (x_2 - x_4)^2} \right).$$

В итоге уравнения (14) в явном виде записываются так:

$$\begin{aligned}
 & m\ddot{x}_1 + k \left[(x_1 + x_2) + \left(l^2 + (x_1 - x_3)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right] \times \\
 & \quad \times \left(l^2 + (x_1 - x_3)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x_1 - x_3) - \\
 & \quad - \left[\left(l^2 + (l - x_1 - x_4)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right] \times \\
 & \quad \times \left(l^2 + (l - x_1 - x_4)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (l - x_1 - x_4) \Big] = \\
 & = \eta \left(\dot{x}_1 + \dot{x}_2 + \frac{(x_2 - x_4)^2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_4)}{l^2 + (x_2 - x_4)^2} \right); \\
 & m\ddot{x}_2 + k \left[(x_1 + x_2) + \left(l^2 + (x_2 - x_4)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right] \times \\
 & \quad \times \left(l^2 + (x_2 - x_4)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x_2 - x_4) - \\
 & \quad - \left[\left(l^2 + (l - x_2 - x_3)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right] \times \\
 & \quad \times \left(l^2 + (l - x_2 - x_3)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (l - x_2 - x_3) \Big] = \\
 & = \eta \left(\dot{x}_1 + \dot{x}_2 + \frac{(x_2 - x_4)^2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_4)}{l^2 + (x_2 - x_4)^2} \right); \\
 & m\ddot{x}_3 + k \left[(x_3 + x_4) - \left(l^2 + (x_1 - x_3)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right] \times \\
 & \quad \times \left(l^2 + (x_1 - x_3)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x_1 - x_3) - \\
 & \quad - \left[\left(l^2 + (l - x_2 - x_3)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right] \times \\
 & \quad \times \left(l^2 + (l - x_2 - x_3)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (l - x_2 - x_3) \Big] = \\
 & = \eta \left(\dot{x}_3 + \dot{x}_4 - \frac{(x_1 - x_3)^2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_3)}{l^2 + (x_1 - x_3)^2} \right); \\
 & m\ddot{x}_4 + k \left[(x_3 + x_4) - \left(l^2 + (x_2 - x_4)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right] \times \\
 & \quad \times \left(l^2 + (x_2 - x_4)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x_2 - x_4) - \left[\left(l^2 + (l - x_1 - x_4)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - l \right] \times \\
 & \quad \times \left(l^2 + (l - x_1 - x_4)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (l - x_1 - x_4) \Big] = \\
 & = \eta \left(\dot{x}_3 + \dot{x}_4 - \frac{(x_2 - x_4)^2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_4)}{l^2 + (x_2 - x_4)^2} \right).
 \end{aligned}$$

Как и в первой модельной задаче, рассмотрим различные варианты начальных условий для введенного блочного элемента в случае наличия демпфирующих внутренних элементов.

Вариант 2.1. Данный тип начальных условий аналогичен варианту 1.1:

$$\begin{aligned}
 & t = 0, x_i = X; i = 1 \text{ or } 2 \dots \text{ or } 4 \text{ или} \\
 & t = 0, y_i = Y; i = 1 \text{ or } 2 \dots \text{ or } 4.
 \end{aligned}$$

В качестве примера на рисунке 8 а приведены результаты расчетов в предположении, что внутренний элемент 1 в начальный момент времени имеет смещение в горизонтальном направлении, а на рисунке 8 б, когда элемент 1 в начальный момент смещается вертикально (в этом случае ось X направлена вертикально):

$$\begin{aligned}
 & \text{при } t = 0, x_1 = U, \dot{x}_1 = 0, x_2 = 0, \dot{x}_2 = 0, \\
 & x_3 = 0, \dot{x}_3 = 0, x_4 = 0, \dot{x}_4 = 0.
 \end{aligned}$$

Картины приведены для следующих значений, входящих в определяющее уравнение величин: $m = 2$ кг, $l = 0,1$ м, $k = 100$ Н/м, $h = 0,5$ Н·с/м при $t = 0, x_1 = 0,03$ м.

Рассматривался временной интервал $t = [0, 10]$ с. Положение системы фиксировалось через 1 с.

Вариант 2.2. Начальные условия аналогичны начальным условиям 1.2. Таким образом, рассматривается ситуация, когда при $t = 0$ первый элемент приобретает начальную скорость:

$$\begin{aligned}
 & \text{при } t = 0, x_1 = 0, \dot{x}_1 = 0,5 \text{ м/с}, x_2 = 0, \dot{x}_2 = 0, \\
 & x_3 = 0, \dot{x}_3 = 0, x_4 = 0, \dot{x}_4 = 0.
 \end{aligned}$$

На рисунке 9 приведены картины изменения геометрии блока при следующих характеристиках: $m = 2$ кг, $l = 0,1$ м, $k = 100$ Н/м, $h = 0,3$ Н·с/м.

Как и во всех предыдущих случаях рассматривался временной интервал $t = [0, 10]$ с. Положение системы фиксировалось через 1 с.

Вариант 2.3. Начальные условия соответствуют условиям варианта 1.3:

$$\begin{aligned}
 & t = 1, x_1 = 0, \dot{x}_{1(t=1)} = 0,5 \text{ м/с}, x_2 = 0, \dot{x}_2 = 0, \\
 & x_3 = 0, \dot{x}_3 = 0, x_4 = 0, \dot{x}_4 = 0.
 \end{aligned}$$

На рисунке 10 приведены картины изменения геометрии блока при следующих характеристиках: $m = 0,5$ кг, $l = 0,1$ м, $k = 100$ Н/м, $h = 0,3$ Н·с/м.

Как и в предыдущих ситуациях, рассматривался временной интервал $t = [0, 10]$ с. Положение системы фиксировалось через 1 с.

Выводы. В статье предложен тип блочного элемента, позволяющий учитывать его деформируемость при внешнем нагружении. На основе данного типа блочного элемента представляется перспективным построить реализацию метода дискретных элементов для моделирования напряженно-деформированного состояния областей породных массивов, когда рассмотрение последних в рамках моделей сплошных сред является достаточно «грубым» приближением. Важным является и тот факт, что

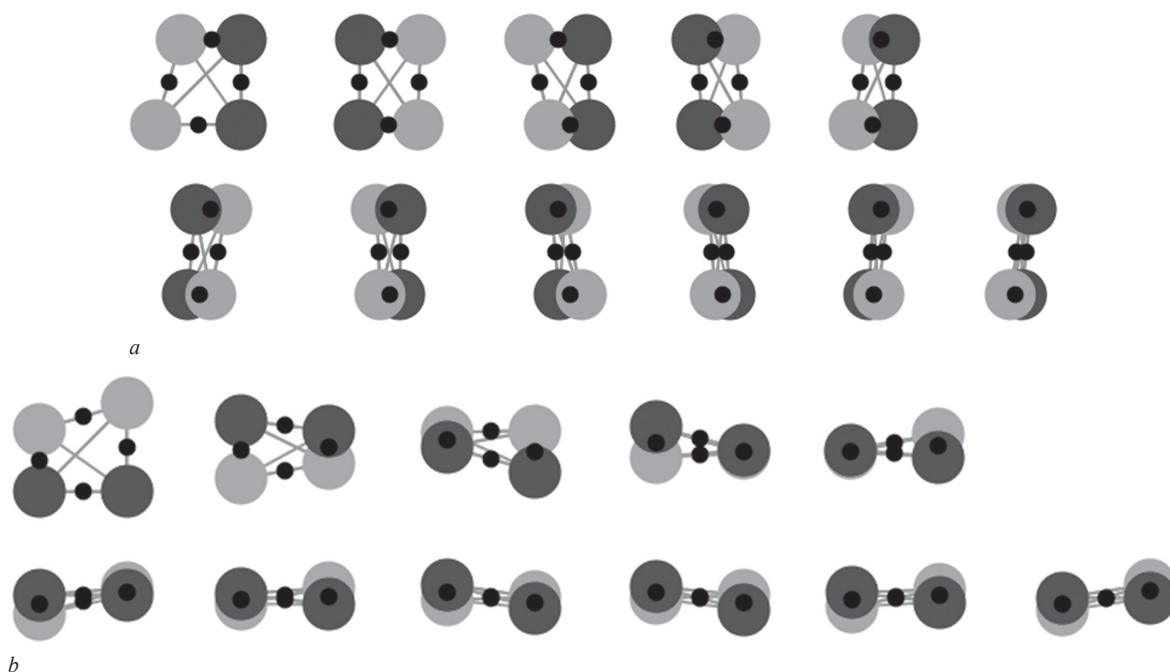


Рисунок 8 — Изменение геометрии блока для варианта начальных условий 2.1 при перемещении в начальный момент времени первого внутреннего элемента в горизонтальном (а) и вертикальном (b) направлениях
 Figure 8 — Change in the geometry of the block for the option 2.1 of the initial conditions when moving the first internal element in the horizontal (a) and vertical (b) directions at the initial moment of time

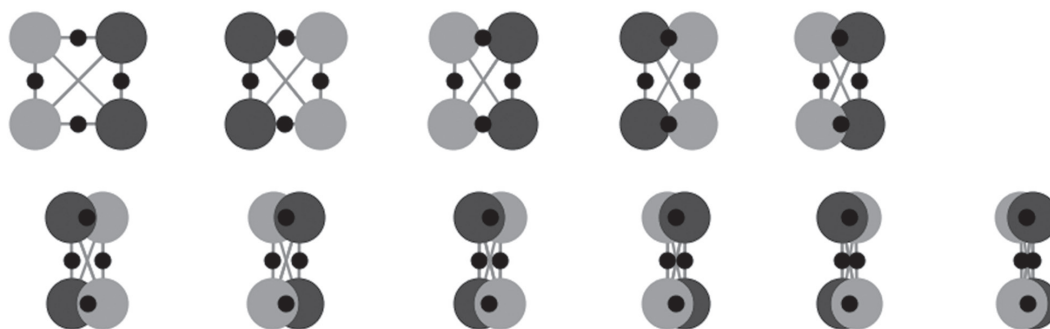


Рисунок 9 — Изменение геометрии дискретного элемента для варианта 2.2 начальных условий в случае, когда первый внутренний элемент имеет начальную скорость в горизонтальном направлении
 Figure 9 — Change in the geometry of the discrete element for the option 2.2 of the initial conditions in the case when the first internal element has an initial velocity in the horizontal direction

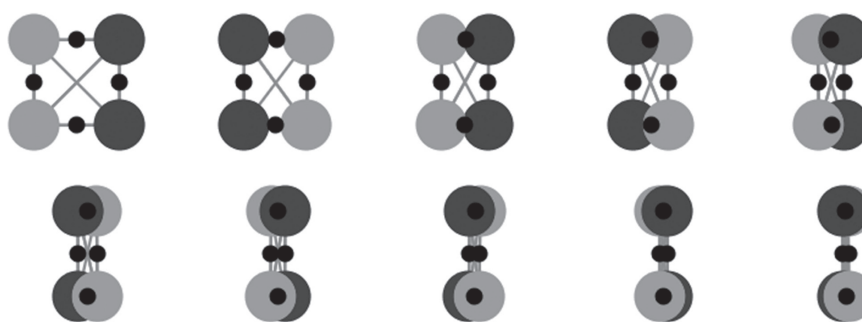


Рисунок 10 — Изменение геометрии дискретного элемента для варианта 2.3 начальных условий в случае воздействия на первый внутренний элемент нагрузки в виде треугольного импульса типа (9)
 Figure 10 — Change in the geometry of the discrete element for the option 2.3 of the initial conditions in the case of impact on the first internal element of the load in the form of the triangular pulse of type (9)

введенный блочный элемент может быть использован как для задач при статическом нагружении, так и в случае динамических задач.

Исследование выполнено в рамках совместного проекта БРФФИ-НФЕНК № ГР 20221870

«Высокопроизводительный метод дискретных элементов для гранулированных материалов произвольной формы и его применение в геотехнике холодных регионов и горнорудных районов».

Список литературы

1. Meshless methods: an overview and recent developments / T. Belytchko [et al.] // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* — 1996. — Vol. 139, iss. 1–4. — Pp. 3–47. — DOI: [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(96\)01078-X](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01078-X).
2. A continuum-based discrete element method for continuous deformation and failure process / Sh. Li [et al.] // *Comput. Mech.: WCCM VI in conjunction with APCOM'04*, Beijing, 5–10 Sept. 2004. — Beijing, 2004.
3. Hybrid finite-discrete element simulation of crack propagation under mixed mode loading condition / A.K. Ariffin [et al.] // *Key Engineering Materials*. — 2006. — Vol. 306–308. — Pp. 495–500. — DOI: <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.306-308.495>.
4. Simulations of fracture and fragmentation of geologic materials using combined FEM/DEM analysis / J.P. Morris [et al.] // *Int. J. Impact Eng.* — 2006. — Vol. 33, iss. 1–12. — Pp. 463–473. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2006.09.006>.
5. Karami, A. Asperity degradation and damage in the direct shear test: A hybrid FEM/DEM approach / A. Karami, D. Stead // *Rock Mech. Rock Eng.* — 2008. — Vol. 41, iss. 2. — Pp. 229–266. — DOI: <https://doi.org/10.1007/s00603-007-0139-6>.
6. Моделирование локализации сдвигов и перехода геосреды к неустойчивым режимам деформирования на основе метода дискретных элементов / Д.С. Журкина [и др.] // *ФТПРПИ*. — 2022. — № 3 — С. 13–22. — DOI: <https://doi.org/10.15372/FTPRPI20220302>.
7. Журавков, М.А. Современные численные методы в механике: курс лекций / М.А. Журавков. — Минск: БГУ, 2022. — 132 с.
8. Jiang, M. Application of discrete element method to geomechanics / M. Jiang, H.-S. Yu. // *Modern Trends in Geomechanics*. — 2006. — Pp. 241–269. — DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-540-35724-7_15.
9. Чанышев, А.И. Новые постановки задач геомеханики с учетом запредельного деформирования горных пород / А.И. Чанышев, И.М. Абдулин // *ФТПРПИ*. — 2022. — № 5. — С. 12–27. — DOI: <https://doi.org/10.15372/FTPRPI20220502>.
10. Zhuravkov, M. Modeling of deformation processes in rock massif in the vicinity of underground goafs considering the formation of discontinuity zones / M. Zhuravkov, Ji Shunying, A. Kanavalau // *Theoretical and Applied Mechanics Letters*. — 2020. — Vol. 10, iss. 2. — Pp. 92–97. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.taml.2020.01.012>.
11. Shi, G. Discontinuous deformation analysis — a new numerical model for the statics, dynamics of block systems: PhD thesis / G. Shi; University of California. — Berkeley, 1988. — 730 p.
12. Вярвильская, О.Н. Краткий курс теоретической механики: учеб. пособие / О.Н. Вярвильская, Д.Г. Медведев, В.П. Савчук; под ред. Д.Г. Медведева. — Минск: БГУ, 2020. — 207 с.
13. Евсеев, Н.А. Элементы гармонического анализа / Н.А. Евсеев. — Новосибирск: НГУ, 2017. — 97 с.
14. Шакирзянов, Р.А. Динамика и устойчивость сооружений: учеб. пособие / Р.А. Шакирзянов, Ф.Р. Шакирзянов. — 2-е изд., перераб. — Казань: Изд-во Казанск. гос. архит.-строит. ун-та, 2015. — 120 с.
15. Журавков, М.А. Математические модели механики твердых тел: учеб. пособие / М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов. — Минск: БГУ, 2021. — 535 с.

ZHURAVKOV Michael A., D. Sc. in Phys. and Math., Prof.
Head of the Department “Theoretical and Applied Mechanics”¹
E-mail: zhuravkov@bsu.by

NIKOLAITCHIK Mikhail A., M. Sc. in Phys. and Math.
Head of the Research Laboratory “Applied Mechanics”¹
E-mail: nikolaitchik.m@gmail.com

Shiqi ZHANG
Master’s Student of the Mechanics and Mathematics Faculty¹
E-mail: shiqizhang177@gmail.com

¹Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

Received 25 May 2023.

MECHANICAL AND MATHEMATICAL MODELS OF ONE TYPE OF BLOCK ELEMENTS FOR PROBLEMS OF UNDERGROUND GEOMECHANICS

The article presents a procedure for constructing mechanical and mathematical models to describe the stress-strain state of one type of block element, taking into account its own deformation. On the basis of this type of block element, it seems promising to build an implementation of the discrete element method for modeling the mechanical state of rock masses in areas of a clear violation of the continuity hypothesis. The introduced block element can be used both for issues under static loading and in the case of dynamic problems.

Keywords: numerical methods, mechanics of deformable solids, discrete element method, underground geomechanics, deformable block element, continuous-discrete models

DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2023-3-64-73-82>

References

- Belytschko T., Krongauz Y., Organ D., Fleming M., Krysl P. Meshless methods: an overview and recent developments. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 1996, vol. 139, iss. 1–4, pp. 3–47. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(96\)01078-X](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01078-X).
- Li S., Zhao M., Wang Y., Wang J. A continuum-based discrete element method for continuous deformation and failure process. *WCCM VI in conjunction with APCOM'04 "Computational mechanics"*. Beijing, 2004.
- Ariffin A.K., Huzni S., Nor M.J.M., Mohamed N.A.N. Hybrid finite-discrete element simulation of crack propagation under mixed mode loading condition. *Key engineering materials*, 2006, vol. 306–308, pp. 495–500. DOI: <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.306-308.495>
- Morris J. P., Rubin M. B., Block G. I., and Bonner M. P. Simulations of fracture and fragmentation of geologic materials using combined FEM/DEM analysis. *International journal of impact engineering*, 2006, vol. 33, iss. 1–12, pp. 463–473. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2006.09.006>.
- Karami A., Stead D. Asperity degradation and damage in the direct shear test: A hybrid FEM/DEM approach. *Rock mechanics and rock engineering*, 2008, vol. 41, iss. 2, pp. 229–266. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00603-007-0139-6>.
- Zhurkina D.S., Klishin S.V., Lavrikov S.V., Leonov M.G. Modelirovanie lokalizatsii sdivgov i perekhoda geosredy k neustoychivym rezhimam deformirovaniya na osnove metoda diskretnykh elementov [DEM-based modeling of shear localization and transition of geomedium to unstable deformation]. *Fiziko-tehnicheskie problemy razrabotki poleznykh iskopaemykh*, 2022, no. 3, pp. 13–22. DOI: <https://doi.org/10.15372/FTPRPI20220302> (in Russ.).
- Zhuravkov M.A. *Sovremennye chislennyye metody v mekhanike* [Modern numerical methods in mechanics]. Minsk, Belorusskiy gosudarstvennyy universitet Publ., 2022. 132 p. (in Russ.).
- Jiang M., Yu H.-S. Application of discrete element method to geomechanics. *Modern trends in geomechanics*, 2006, pp. 241–269. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-540-35724-7_15.
- Chanyshev A.I., Abdulin I.M. Novye postanovki zadach geomekhaniki s uchetom zapredelnogo deformirovaniya gornykh porod [New formulations of geomechanical problems with regard to post-limit deformation of rocks]. *Fiziko-tehnicheskie problemy razrabotki poleznykh iskopaemykh*, 2022, no. 5, pp. 12–27. DOI: <https://doi.org/10.15372/FTPRPI20220502> (in Russ.).
- Zhuravkov M., Ji S., Kanavalau A. Modeling of deformation processes in rock massif in the vicinity of underground goafs considering the formation of discontinuity zones. *Theoretical and applied mechanics letters*, 2020, vol. 10, iss. 2, pp. 92–97. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.taml.2020.01.012>.
- Shi G. *Discontinuous deformation analysis – a new numerical model for the statics, dynamics of block systems*. Ph. D. Thesis. Berkeley, 1988. 730 p.
- Vyarvilskaya O.N., Medvedev D.G., Savchuk V.P. *Kratkiy kurs teoreticheskoy mekhaniki* [A short course in theoretical mechanics]. Minsk, Belorusskiy gosudarstvennyy universitet Publ., 2020. 207 p. (in Russ.).
- Evseev N.A. *Elementy garmonicheskogo analiza* [Elements of harmonic analysis]. Novosibirsk, Novosibirskiy gosudarstvennyy universitet Publ., 2017. 97 p. (in Russ.).
- Shakirzyanov R.A., Shakirzyanov F.R. *Dinamika i ustoychivost sooruzheniy* [Dynamics and stability of structures]. Kazanskiy gosudarstvennyy arkhitekturno-stroitelnyy universitet Publ., 2015. 120 p. (in Russ.).
- Zhuravkov M.A., Starovoitov E.I. *Matematicheskie modeli mekhaniki tverdykh tel* [Mathematical models of mechanics of solids]. Minsk, Belorusskiy gosudarstvennyy universitet Publ., 2021. 535 p. (in Russ.).