

УДК 621.8

О.Н. ПРОТАСЕНЯ, канд. техн. наук, доц.
доцент кафедры «Машиноведение и детали машин»¹
E-mail: olegnikpro@gmail.com

А.А. КАЛИНА, канд. техн. наук, доц.
заведующий кафедрой «Машиноведение и детали машин»¹
E-mail: a.kalina@mail.ru

¹Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Республика Беларусь

Поступила в редакцию 24.11.2025.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ УГЛОВЫХ КООРДИНАТ ЗВЕНЬЕВ ПЛАНЕТАРНЫХ МЕХАНИЗМОВ

В статье рассмотрена общепринятая кинематическая теория расчета планетарных механизмов, основанная на принципе эквивалентности реального и обращенного механизмов (метод Виллиса). Предложены оценочные критерии (относительная угловая скорость сателлита; число зубьев сателлита, входящих в зацепление с центральным колесом за единицу времени), доказывающие на конкретных примерах расчета планетарного механизма и его обращенных версий (планетарный с нулевой инверсией и дифференциальный с произвольной инверсией) эквивалентность реальной кинематической схемы и ее виртуальных состояний. Дано универсальное уравнение определения углов поворота сателлита за один оборот солнечного зубчатого колеса. Представлен алгоритм распределения окружных сил и их реакций в зацеплении сателлита и центральных колес на основе рычага сил Архимеда. Рассмотрены вопросы сложного вращательного движения сателлита планетарного механизма, определены относительные и абсолютные передаточные отношения между звеньями механизма, рассчитан силовой баланс сателлита.

Ключевые слова: планетарный ряд, дифференциальный механизм, метод Виллиса для планетарных передач, относительная угловая скорость, закон рычага сил

DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2026-1-74-23-30>

Идея написания данного материала возникла у авторов в связи с недостаточным освещением в технической литературе и не всегда правильным пониманием в научном и университетском сообществах метода Виллиса для кинематических расчетов планетарных механизмов [1–5].

Принцип эквивалентности. При исследовании планетарных (дифференциальных) механизмов используется метод остановки водила h (метод Виллиса), заключающийся в мысленном дополнительном вращении звеньев механизма в обратном направлении с угловой скоростью, равной угловой скорости водила ω_h . При данной инверсии водило затормаживается, а относительное движение звеньев не изменяется. Получаем так называемый обращенный (виртуальный) механизм [6].

Рассмотрим ряд примеров (реальный механизм и обращенные: планетарный с нулевой инверсией при $\omega_h = 0$ и дифференциальный с произвольной инверсией при $\omega_h \neq 0$) и сравним их по ряду критериев: 1) относительная угловая скорость сателлита $\omega_{отн}$; 2) число зубьев сателлита z_g , входящих в зацепление с центральным колесом за единицу времени.

Реальный механизм. В тексте приняты следующие обозначения: a — солнечное зубчатое колесо; b — эпициклическое зубчатое колесо; h — водило; g — сателлит; T — вращающий момент на звеньях; F_t — окружные силы в зацеплениях; ω — угловая скорость звеньев; d — диаметры начальных окружностей зубчатых колес; P — мгновенный центр скоростей сателлита g . На рисунке 1 изображена кинематическая схема, планы окружных и угловых скоростей звеньев трехзвенного реального планетарного механизма.

Расчет. Приняв значения $T_a = 100$ Н·м; $\omega_a = 100$ рад/с; $z_a = 21$; $z_b = 147$; $z_g = 63$; $d_a = 42$ мм; $d_b = 294$ мм; $d_g = 126$ мм, получим:
- передаточное отношение [7]:

$$i_{пл} = i_{ah}^b = \frac{\omega_a}{\omega_h} = 1 - i_{ab}^h = 1 - \left(-\frac{z_b}{z_a} \right) = 1 + \frac{z_b}{z_a} = 1 + \frac{147}{21} = 8;$$

- угловые скорости звеньев [8]:

$$V_g = V_a = \omega_a \cdot \frac{d_a}{2} = 100 \cdot \frac{0,042}{2} = 2,1 \text{ м/с};$$

$$\omega_g = -\frac{V_g}{d_g} = -\frac{2,1}{0,126} = -16,67 \text{ рад/с};$$

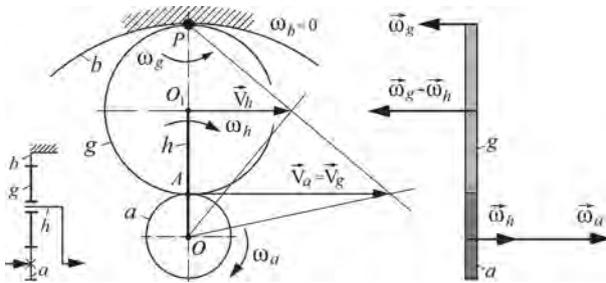


Рисунок 1 — План окружных и угловых скоростей звеньев реального механизма
 Figure 1 — Plan of circular and angular velocities of links of a real mechanism

$$V_h = \frac{V_a}{2} = \frac{2,1}{2} = 1,05 \text{ м/с};$$

$$\omega_h = \frac{V_h}{\frac{d_a + d_g}{2}} = \frac{1,05}{0,084} = 12,5 \text{ рад/с.}$$

В работе спутник совершает сложное движение [9]: абсолютное (вращение вокруг мгновенного центра скоростей P), относительное (вращение относительно собственной оси O_1 при неподвижном водиле) и переносное (вращение вместе с водилом относительно основной оси O). Положительным будем считать вращение звена по часовой стрелке.

Векторное уравнение абсолютной угловой скорости спутника ω_g :

$$\vec{\omega}_g = \vec{\omega}_{\text{отн}} + \vec{\omega}_{\text{прн}},$$

где $\omega_{\text{отн}}$ — вектор относительной угловой скорости; $\omega_{\text{прн}}$ — вектор переносной угловой скорости, равный абсолютной угловой скорости водила ω_h .

Примечание. Так как векторы угловых скоростей планетарных и дифференциальных механизмов с цилиндрическими колесами коллинеарны, допускается арифметическое суммирование их модулей с учетом направлений.

Тогда относительная угловая скорость спутника g (см. рисунок 1)

$$\omega_{\text{отн}} = \omega_g - \omega_h = -16,67 - 12,5 = -29,17 \text{ рад/с.}$$

Относительная угловая скорость спутника по Кудрявцеву В.Н. ($\omega_b = 0$) [2]:

$$\omega_{\text{отн}} = (\omega_b - \omega_h) \frac{z_b}{z_g} = -\omega_h \cdot \frac{z_b}{z_g} =$$

$$= -12,5 \cdot \frac{147}{63} = -29,17 \text{ рад/с};$$

- углы поворота спутника за один оборот звеньев механизма: уравнение абсолютного угла поворота β_g спутника g при его вращении:

$$\beta_g = \beta_{\text{отн}} + \beta_{\text{прн}},$$

где $\beta_{\text{отн}}$ — угол поворота спутника при его относительном движении; $\beta_{\text{прн}}$ — угол поворота спутника при его переносном движении, равный углу

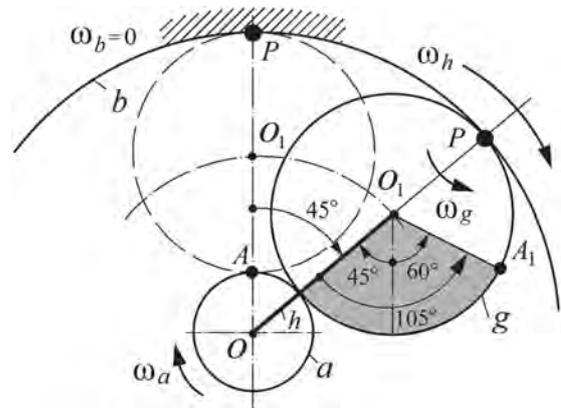


Рисунок 2 — Углы поворота спутника за один оборот солнечного колеса реального механизма
 Figure 2 — Satellite rotation angles per one revolution of the sun wheel of the real mechanism

поворота водила β_h . Положительным примем угол поворота по часовой стрелке.

Универсальное уравнение определения углов поворота спутника за один оборот солнечного зубчатого колеса a (рисунок 2):

$$(\beta_g)_a = (\beta_{\text{отн}})_a + (\beta_h)_a;$$

$$\frac{\omega_g \cdot 360^\circ}{\omega_a} = \frac{\omega_{\text{отн}} \cdot 360^\circ}{\omega_a} + \frac{\omega_h \cdot 360^\circ}{\omega_a};$$

$$\frac{-16,67 \cdot 360^\circ}{100} = \frac{-29,17 \cdot 360^\circ}{100} + \frac{12,5 \cdot 360^\circ}{100};$$

$$-60^\circ = -105^\circ + 45^\circ;$$

- число зубьев спутника, входящих в зацепление с солнечным зубчатым колесом за 1 с (минус указывает на направление вращения спутника):

$$(z_g)_a = z_g \cdot \frac{(\beta_{\text{отн}})_a}{360^\circ} \cdot \frac{\omega_a}{2 \cdot \pi} = 63 \cdot \frac{-105^\circ}{360^\circ} \cdot \frac{100}{2 \cdot \pi} = -292,6,$$

где $z_g \cdot \frac{(\beta_{\text{отн}})_a}{360^\circ}$ — число зубьев спутника g , распо-

ложенных на угле поворота спутника при его относительном движении $\beta_{\text{отн}}$ и входящих в зацепление с солнечным колесом a за один его оборот;

$\frac{\omega_a}{2 \cdot \pi}$ — число оборотов солнечного колеса a за 1 с.

Обращенный планетарный механизм (рисунок 3). С учетом метода остановки водила h (метод Виллиса), для рассматриваемой кинематической схемы (см. рисунок 1) получим так называемый обращенный механизм (виртуальный), в котором мысленно изменим вращение звеньев механизма в обратном направлении с угловой скоростью, равной угловой скорости водила $\omega_h = 12,5$ рад/с. При этом водило затормаживается:

- передаточное отношение:

$$i_{ab}^h = \frac{\omega'_a}{\omega'_b} = -\frac{z_b}{z_a} = -\frac{147}{21} = -7;$$

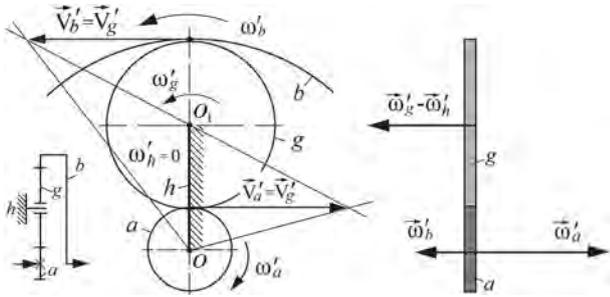


Рисунок 3 — План окружных и угловых скоростей звеньев обращенного планетарного механизма
 Figure 3 — Plan of circumferential and angular velocities of the links of a reversed planetary mechanism

- угловые скорости звеньев:

$$\omega'_a = \omega_a - \omega_h = 100 - 12,5 = 87,5 \text{ рад/с};$$

$$\omega'_b = \omega_b - \omega_h = 0 - 12,5 = -12,5 \text{ рад/с}.$$

Абсолютная угловая скорость сателлита g (см. рисунок 3):

$$V'_g = V'_b = V'_a = \omega'_a \cdot \frac{d_a}{2} = 87,5 \cdot \frac{0,042}{2} = 1,8375 \text{ м/с};$$

$$\omega'_g = -\frac{2 \cdot V'_g}{d_g} = -\frac{2 \cdot 1,8375}{0,126} = -29,17 \text{ рад/с}.$$

Относительная угловая скорость сателлита (см. рисунок 3):

$$\omega'_{\text{отн}} = \omega'_g - \omega'_h = -29,17 - 0 = -29,17 \text{ рад/с}.$$

Относительная угловая скорость сателлита по Кудрявцеву В.Н. ($\omega'_h = 0$) [2]:

$$\omega'_{\text{отн}} = (\omega'_b - \omega'_h) \frac{z_b}{z_g} = \omega'_b \cdot \frac{z_b}{z_g}$$

$$= -12,5 \cdot \frac{147}{63} = -29,17 \text{ рад/с};$$

- углы поворота сателлита за один оборот солнечного колеса a (рисунок 4):

$$(\beta'_g)_a = (\beta'_{\text{отн}})_a + (\beta'_h)_a;$$

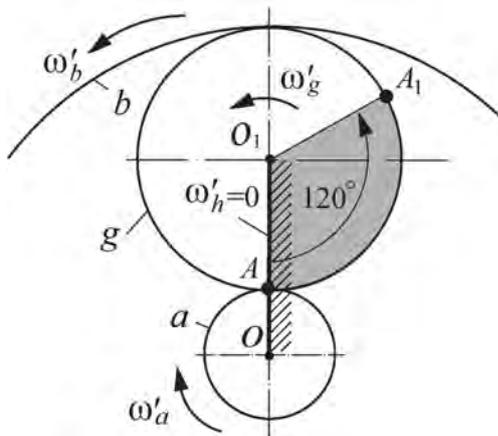


Рисунок 4 — Угол поворота сателлита за один оборот солнечного колеса в обращенном планетарном механизме
 Figure 4 — Satellite rotation angle per one revolution of the sun wheel in the reversed planetary mechanism

$$\frac{\omega'_g \cdot 360^\circ}{\omega'_a} = \frac{\omega'_{\text{отн}} \cdot 360^\circ}{\omega'_a} + \frac{\omega'_h \cdot 360^\circ}{\omega'_a};$$

$$\frac{-29,17 \cdot 360^\circ}{87,5} = \frac{-29,17 \cdot 360^\circ}{87,5} + \frac{0 \cdot 360^\circ}{87,5};$$

$$-120^\circ = -120^\circ + 0;$$

- число зубьев сателлита, входящих в зацепление с солнечным зубчатым колесом за 1 с:

$$(z'_g)_a = z_g \cdot \frac{(\beta'_{\text{отн}})_a}{360^\circ} \cdot \frac{\omega'_a}{2 \cdot \pi} = 63 \cdot \frac{-120^\circ}{360^\circ} \cdot \frac{87,5}{2 \cdot \pi} = -292,6.$$

Обращенный дифференциальный механизм (рисунок 5). В реальной схеме мысленно изменим вращение звеньев в обратном направлении на произвольную величину угловой скорости $\Delta\omega = 5,0$ рад/с. Получим обращенный дифференциальный механизм, суммирующий вращение ведущих солнечного a и эпициклического b колес на выходном звене — водиле h .

- угловые скорости звеньев:

$$\omega''_a = \omega_a - \Delta\omega = 100 - 5 = 95 \text{ рад/с};$$

$$\omega''_b = \omega_b - \Delta\omega = 0 - 5 = -5 \text{ рад/с}.$$

Из рисунка 5 определим абсолютную угловую скорость сателлита ω''_g и водила ω''_h :

$$V''_a = V''_g = \omega''_a \cdot \frac{d_a}{2} = 95 \cdot \frac{0,042}{2} = 1,995 \text{ м/с};$$

$$V''_b = \omega''_b \cdot \frac{d_b}{2} = -5 \cdot \frac{0,294}{2} = -0,735 \text{ м/с};$$

$$\frac{|V''_a|}{|V''_b|} = \frac{|AP|}{d_g - |AP|};$$

$$|AP| = \frac{|V''_a| \cdot d_g}{|V''_a| + |V''_b|} = \frac{1,995 \cdot 0,126}{1,995 + 0,735} = 0,0921 \text{ м};$$

$$\omega''_g = -\frac{V''_g}{|AP|} = -\frac{1,995}{0,0921} = -21,67 \text{ рад/с};$$

$$\frac{V''_g}{V''_h} = \frac{|AP|}{|O_1P|};$$

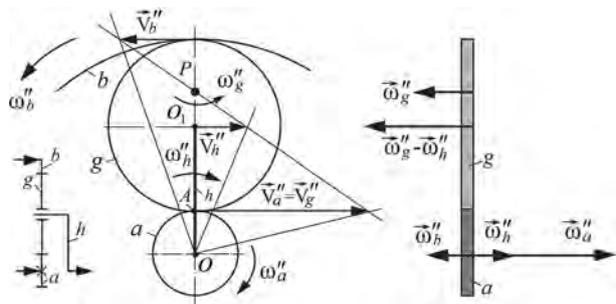


Рисунок 5 — План окружных и угловых скоростей звеньев обращенного дифференциального механизма
 Figure 5 — Plan of circumferential and angular velocities of the links of a reversed differential mechanism

$$V_h'' = \frac{V_g'' \cdot |O_1P|}{|AP|} = \frac{1,995 \cdot \left(|AP| - \frac{d_g}{2} \right)}{0,0921} =$$

$$= \frac{1,995 \cdot \left(0,0921 - \frac{0,126}{2} \right)}{0,0921} = 0,63 \text{ м/с};$$

$$\omega_h'' = \frac{V_h''}{\frac{d_a + d_g}{2}} = \frac{0,63}{0,084} = 7,5 \text{ рад/с}.$$

Тогда относительная угловая скорость сателлита g (см. рисунок 5):

$$\omega_{\text{отн}}'' = \omega_g'' - \omega_h'' = -21,67 - 7,5 = -29,17 \text{ рад/с}.$$

Относительная угловая скорость сателлита по Кудрявцеву В.Н. [2]:

$$\omega_{\text{отн}}'' = (\omega_b'' - \omega_h'') \frac{z_b}{z_g} = (-5 - 7,5) \frac{147}{63} = -29,17 \text{ рад/с};$$

- углы поворота сателлита за один оборот солнечного колеса a (рисунок 6):

$$(\beta_g'')_a = (\beta_{\text{отн}}'')_a + (\beta_h'')_a;$$

$$\frac{\omega_g'' \cdot 360^\circ}{\omega_a''} = \frac{\omega_{\text{отн}}'' \cdot 360^\circ}{\omega_a''} + \frac{\omega_h'' \cdot 360^\circ}{\omega_a''};$$

$$\frac{-21,67 \cdot 360^\circ}{95} = \frac{-29,17 \cdot 360^\circ}{95} + \frac{7,5 \cdot 360^\circ}{95};$$

$$-82,1^\circ = -110,5^\circ + 28,4^\circ;$$

- число зубьев сателлита, входящих в зацепление с солнечным зубчатым колесом за 1 с:

$$(z_g'')_a = z_g \cdot \frac{(\beta_{\text{отн}}'')_a}{360^\circ} \cdot \frac{\omega_a''}{2 \cdot \pi} = 63 \cdot \frac{-110,5^\circ}{360^\circ} \cdot \frac{95}{2 \cdot \pi} = -292,6.$$

Усилия в звеньях планетарного ряда. С целью упрощения расчетов полагаем, что имеется один сателлит. Пренебрегая потерями на трение,

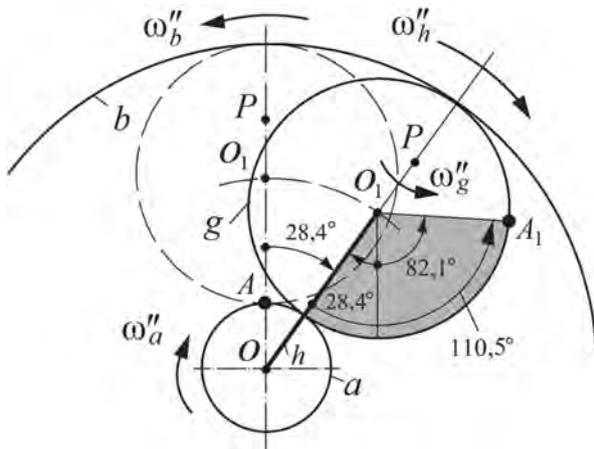


Рисунок 6 — Углы поворота сателлита обращенного дифференциального механизма за один оборот солнечного колеса

Figure 6 — Satellite rotation angles of the reversed differential mechanism per one revolution of the sun wheel

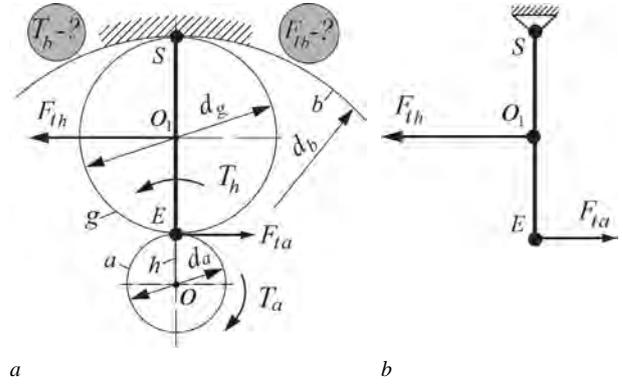


Рисунок 7 — Предварительная схема силового равновесного состояния: a — планетарного ряда; b — однозвенцового сателлита
Figure 7 — Preliminary diagram of the force equilibrium state: a — planetary series; b — single-ring satellite

условие равновесного силового состояния планетарного ряда при установившемся режиме движения (рисунок 7 a) [10–12]:

$$T_a + T_b + T_h = 0.$$

Для любой схемы планетарной передачи существует закон рычага сил с точкой вращения, расположенной в полюсе зацепления сателлита и неподвижного центрального колеса [10]. Для реального планетарного механизма запишем закон рычага сил при неподвижном колесе b (см. рисунок 7 b) с точкой вращения S (рычаг второго рода ES) (положительным будем считать вращающий момент по часовой стрелке):

$$T_{F_{th}} + T_{F_{ta}} = 0; F_{th} \cdot O_1S - F_{ta} \cdot ES = 0;$$

$$F_{th} \cdot \frac{d_g}{2} = F_{ta} \cdot d_g; F_{th} = 2 \cdot F_{ta}.$$

Из рисунка 7 a определим силы F_{ta} , F_{th} и момент T_h (при $T_a = 100 \text{ Н} \cdot \text{м}$):

$$T_a = F_{ta} \cdot \frac{d_a}{2};$$

$$F_{ta} = \frac{2T_a}{d_a} = \frac{2 \cdot 100}{0,042} = 4761,9 \text{ Н};$$

$$F_{th} = 2 \cdot F_{ta} = 2 \cdot 4761,9 = 9523,8 \text{ Н};$$

$$T_h = \frac{-F_{th} (d_a + d_g)}{2} =$$

$$= \frac{-9523,8(0,042 + 0,126)}{2} = -800 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Решая совместно систему уравнений закона рычага сил и условия равновесного силового состояния, определим направление и модуль вращающего момента T_b и окружной силы F_{tb} на эпиточическом колесе b (см. рисунок 7):

$$T_a + T_b + T_h = 0; T_b = -(T_a + T_h);$$

$$F_{tb} \cdot \frac{d_b}{2} = - \left(F_{ta} \cdot \frac{d_a}{2} - F_{th} \cdot \frac{(d_a + d_g)}{2} \right);$$

$$F_{tb} \cdot \frac{d_b}{2} = - \left(F_{ta} \cdot \frac{d_a}{2} - 2F_{ta} \left(\frac{d_a + d_g}{2} \right) \right);$$

$$F_{tb} \left(\frac{d_a + d_g}{2} \right) = 2F_{ta} \left(\frac{d_a + d_g}{2} \right) - F_{ta} \cdot \frac{d_a}{2} =$$

$$= F_{ta} \left(d_a + d_g - \frac{d_a}{2} \right);$$

$$F_{tb} = F_{ta} \cdot \frac{\frac{d_a + d_g}{2}}{\frac{d_a}{2} + d_g} = F_{ta};$$

$$F_{tb} = F_{ta} = 4761,9 \text{ Н};$$

$$T_b = F_{tb} \left(\frac{d_a}{2} + d_g \right) = 4761,9 \left(\frac{0,042}{2} + 0,126 \right) = 700 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Проверка:

$$T_a + T_b + T_h = 100 + 700 - 800 = 0.$$

Окончательно выразим графически (рисунок 8) и аналитически принцип распределения окружных сил в зацеплении сателлита с центральными колесами:

$$F_{ta} = F_{tb}; \quad F_{th} = 2 \cdot F_{ta} = 2 \cdot F_{tb}.$$

На рисунке 8 сателлит показан в двух временных положениях: в начальный t и последующий t_1 момент времени. За время вращения сателлита рычаг ES переместился в положение E_1S_1 . Но, так как плечи рычага остались равными:

$$(EO_1 = E_1O_1) = (O_1S = O_1S_1) = \frac{d_g}{2},$$

то и окружные силы в зацеплении остаются постоянными:

$$F_{ta} = F_{ta_1} = \frac{2T_a}{d_a};$$

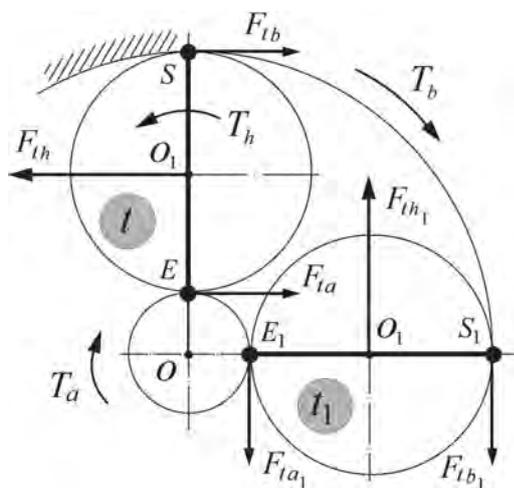


Рисунок 8 — Окончательная схема силового равновесного состояния планетарного ряда
Figure 8 — Final diagram of the force equilibrium state of the planetary series

$$F_{tb} = F_{tb_1} = \frac{2T_b}{d_b}; \quad F_{th} = F_{th_1}.$$

Окружные силы F_{ta} и F_{tb} в зацеплении сателлита и центральных колес, возникающие от действия вращающих моментов T_a и T_b , являются силами давления и приложены непосредственно к зубьям сателлита g (рисунок 9). Со стороны сателлита на зубья центральных колес действуют силы реакций F_{ga} и F_{gb} , приложенные непосредственно к зубьям солнечного a и эпициклического b колес [10]. Данные силы, согласно третьему закону Ньютона, противоположны по направлению, равны по модулю и расположены вдоль прямой (на рисунке 9 данные силы с целью наглядности и информативности условно разнесены друг от друга):

$$F_{ga} = F_{ta} = 4761,9 \text{ Н}; \quad F_{gb} = F_{tb} = 4761,9 \text{ Н}.$$

При наличии в схеме нескольких сателлитов n_w окружные усилия и их реакции в зацеплениях центральных колес с учетом коэффициента неравномерности распределения нагрузки k_w [2]:

$$F_{ta} = F_{ga} = \frac{2 \cdot T_a \cdot k_w}{d_a \cdot n_w}; \quad F_{tb} = F_{gb} = \frac{2 \cdot T_b \cdot k_w}{d_b \cdot n_w}.$$

Выводы. 1. Рассмотренные кинематические

схемы являются эквивалентными, так как полностью совпадают по двум основным критериям:

- относительная угловая скорость сателлита g :

$$\omega_{\text{отн}} = -29,17 \text{ рад/с}; \quad \omega'_{\text{отн}} = -29,17 \text{ рад/с};$$

$$\omega''_{\text{отн}} = -29,17 \text{ рад/с};$$

- число зубьев сателлита g , входящих в зацепление с солнечным колесом за 1 с:

$$(z_g)_a = -292,6; \quad (z'_g)_a = -292,6; \quad (z''_g)_a = -292,6.$$

2. Рассмотрим принцип относительного движения на простом наглядном примере. Пусть на стадионе, поле которого имеет возможность

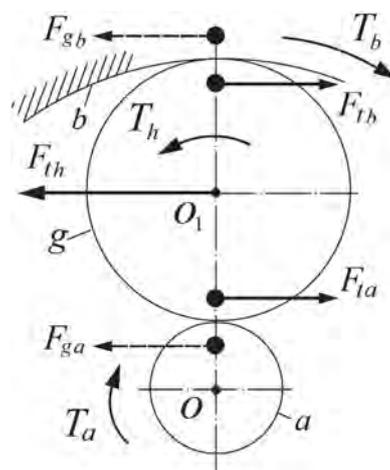


Рисунок 9 — Окружные силы и их реакции в зацеплении сателлита с центральными колесами
Figure 9 — Tangential forces and their reactions in the engagement of the satellite with the center wheels

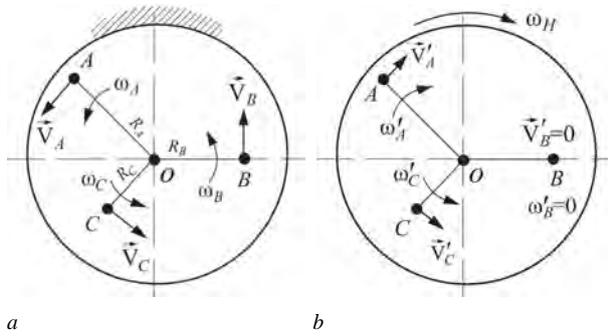


Рисунок 10 — К вопросу об относительности движения:
 a — без внешнего вращения; b — с внешним вращением
Figure 10 — On the relativity of motion: a — without external rotation; b — with external rotation

вращаться относительно центра O с угловой скоростью ω_H , тренируются три спортсмена, A , B , C , и каждый из них движется против часовой стрелки с различными угловыми и окружными скоростями по своей беговой траектории (рисунок 10 а):

$$\omega_A = 1,0 \text{ рад/с}; \omega_B = 1,5 \text{ рад/с}; \omega_C = 2,0 \text{ рад/с}.$$

Относительные параметры:

$$\begin{aligned} \omega_C - \omega_A &= 2,0 - 1,0 = 1,0 \text{ рад/с}; \\ \omega_C - \omega_B &= 2,0 - 1,5 = 0,5 \text{ рад/с}; \\ \omega_B - \omega_A &= 1,5 - 1,0 = 0,5 \text{ рад/с}. \end{aligned}$$

Если поле стадиона будет вращаться по часовой стрелке с угловой скоростью $\omega_H = 1,5 \text{ рад/с}$, то для сторонних наблюдателей, находящихся на трибунах, абсолютные скоростные параметры спортсменов изменятся:

$$\begin{aligned} \omega'_A &= \omega_A - \omega_H = 1,0 - 1,5 = -0,5 \text{ рад/с}; \\ \omega'_B &= \omega_B - \omega_H = 1,5 - 1,5 = 0 \text{ рад/с}; \\ \omega'_C &= \omega_C - \omega_H = 2,0 - 1,5 = 0,5 \text{ рад/с}. \end{aligned}$$

Визуально будет наблюдаться следующее: спортсмен B остановится, спортсмен A будет двигаться в противоположную сторону, спортсмен C замедлит скорость своего движения (см. рисунок 10 б). Но параметры относительного движения не изменятся:

$$\begin{aligned} \omega'_C - \omega'_A &= 0,5 + 0,5 = 1,0 \text{ рад/с}; \\ \omega'_C - \omega'_B &= 0,5 - 0 = 0,5 \text{ рад/с}; \\ \omega'_B - \omega'_A &= 0 + 0,5 = 0,5 \text{ рад/с}. \end{aligned}$$

Можно сделать вывод: два дискретных физических состояния системы взаимосвязанных тел полностью эквивалентны. Таких дискретных физических состояний или инверсий для планетарных механизмов может быть бесконечное множество: внешнее вращение механизма относительно основной оси (различное по направлению и по модулю) влияет только на изменение абсолютных параметров системы тел (звеньев) при сохранении параметров их относительного движения. Наиболее выгодной является нулевая инверсия, при которой водило визуально затормаживается, при

этом значительно упрощаются кинематические расчеты механизма за счет отсутствия в нем подвижных геометрических осей.

3. Абсолютное передаточное отношение планетарного механизма — это отношение абсолютных угловых скоростей входного (ведущего) 1 и выходного (ведомого) 2 валов с неподвижными относительно друг друга осями:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

Определять абсолютное передаточное отношение между звеньями планетарного механизма a , b , h и спутником g некорректно, так как спутник характеризуется тремя угловыми скоростями и имеет подвижную в пространстве ось. Определим эти условные отношения k (коэффициенты пропорциональности) в реальном механизме между угловыми скоростями солнечного зубчатого колеса a и спутника g (см. рисунок 1):

$$\begin{aligned} k_{ag} &= \frac{\text{абсолютная угловая скорость солнца}}{\text{абсолютная угловая скорость спутника}} = \\ &= \frac{\omega_a}{\omega_g} = \frac{100}{-16,67} = -6; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{ag_{\text{отн}}} &= \frac{\text{абсолютная угловая скорость солнца}}{\text{относительная угловая скорость спутника}} = \\ &= \frac{\omega_a}{\omega_{\text{отн}}} = \frac{100}{-29,17} = -3,4286; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{ag_{\text{прн}}} &= \frac{\text{абсолютная угловая скорость солнца}}{\text{переносная угловая скорость спутника}} = \\ &= \frac{\omega_a}{\omega_{\text{прн}}} = \frac{\omega_a}{\omega_h} = \frac{100}{12,5} = 8. \end{aligned}$$

Данные числовые значения используются в расчетах углов поворота спутника за один оборот ведущего солнечного колеса (см. рисунок 2).

Число -6 обозначает, что за шесть оборотов солнечного колеса спутник совершит один абсолютный поворот, а за один оборот солнечного колеса повернется на абсолютный угол $\frac{360^\circ}{-6} = -60^\circ$.

Абсолютное вращение представляет собой качение без скольжения спутника g внутри окружности, образованной множеством мгновенных центров скоростей P (гипоциклоидное вращение).

Число $-3,4286$ обозначает, что за один оборот солнечного колеса спутник относительно водила

$$\text{повернется на угол } \frac{360^\circ}{-3,4286} = -105^\circ.$$

Число 8 совпадает с абсолютным передаточным отношением механизма, так как переносная

угловая скорость спутника равна абсолютной угловой скорости водила. Следовательно, за один оборот солнечного колеса спутник без вращения вокруг собственной оси (переносное движение)

повернется вместе с водилом на угол $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$.

Но так как относительная угловая скорость спутника при нулевой инверсии превращается в абсолютную, а абсолютная угловая скорость солнечного колеса изменяется до значения $\omega'_a = 87,5$ рад/с, то истинное абсолютное передаточное отношение между солнечным колесом и спутником, оси которых неподвижны относительно друг друга (см. рисунки 3, 4)

$$i_{ag}^h = \frac{\text{абсолютная угловая скорость солнца}}{\text{абсолютная угловая скорость спутника}} = \frac{\omega'_a}{\omega'_g} = \frac{87,5}{-29,17} = -3,0.$$

Примечание. Расчет абсолютного передаточного отношения между водилом h и спутником g с подвижной осью встречается в планетарно-кривошипных механизмах, но такие механизмы для преобразования абсолютного гипоциклоидного вращения спутника во вращательное движение выходного вала с неподвижной относительно входного вала осью оснащаются дополнительными устройствами: двойной шарнирной муфтой с передаточным отношением +1 или параллельными кривошипами [13, 14].

4. Окружные силы в зацеплении спутника с центральными колесами распределяются строго по закону рычага сил, основополагающие принципы которого изложены в сочинении Архимеда «О равновесии плоских фигур». Данные силы не зависят от величин и направлений угловых скоростей звеньев механизма. Закон рычага сил распространяется на планетарные и дифференциальные механизмы и нашел широкое применение в работе симметричных и несимметричных дифференциалов главных передач и раздаточных коробок транспортных средств [15, 16]. В данных устройствах ведущим звеном служит водило h , а спутник g выполняет функцию рычага первого рода.

5. Силы реакций F_{ga} и F_{gb} от окружных сил F_{ta} и F_{tb} распределяются строго по третьему закону Ньютона, а именно равны по модулю соответствующим окружным силам, и не зависят от величин и направлений угловых скоростей звеньев механизма и углов их поворотов.

Список литературы

1. Кудрявцев, В.Н. Детали машин: учебник для студентов машиностроительных специальностей вузов / В.Н. Кудрявцев. — Л.: Машиностроение, 1980. — 464 с.
2. Планетарные передачи: справ. / В.Н. Кудрявцев, Ю.Н. Кирдяшев, Е.Г. Гинзбург [и др.]; под ред. В.Н. Кудрявцева, Ю.Н. Кирдяшева. — Л.: Машиностроение, 1977. — 536 с.
3. Руденко, Н.Ф. Планетарные передачи: теория, применение, расчет и проектирование / Н.Ф. Руденко. — 3-е изд. — М.; Л.: Машгиз, 1947. — 756 с.
4. Руденко, В.Н. Планетарные и волновые передачи: альбом конструкций / В.Н. Руденко. — М.: Машиностроение, 1980. — 148 с.
5. Ткаченко, В.А. Проектирование многоспутных планетарных передач / В.А. Ткаченко. — Харьков: Изд-во Харьковского ун-та, 1961. — 182 с.
6. Баранов, Г.Г. Курс теории механизмов и машин: учеб. пособие / Г.Г. Баранов. — 5-е изд., стер. — М.: Машиностроение, 1975. — 494 с.
7. Детали машин: учеб.-метод. пособие для студентов машиностроительных специальностей: в 3 ч. / под общ. ред. А.Т. Скойбеды. — Минск: БНТУ, 2019. — Ч. 1: Механические передачи. — 215 с.
8. Смирнов, Л.П. Исследование вращательного движения при помощи треугольников скоростей / Л.П. Смирнов // Вестник инженеров и техников. — 1932. — № 8.
9. Семенов, М.В. Теория одно- и двухступенчатых планетарных передач / М.В. Семенов. — М.; Л.: Машиностроение, 1966. — 164 с.
10. Кудрявцев, В.Н. Планетарные передачи: справ. / В.Н. Кудрявцев. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.; Л.: Машиностроение, 1966. — 308 с.
11. Курсовое проектирование деталей машин: учеб. пособие для студентов машиностроительных специальностей вузов / В.Н. Кудрявцев, Ю.А. Державец, И.И. Арефьев [и др.]; под общ. ред. В.Н. Кудрявцева. — Л.: Машиностроение, 1984. — 400 с.
12. Красеньков, В.И. Проектирование планетарных механизмов транспортных машин / В.И. Красеньков, А.Д. Ващев. — М.: Машиностроение, 1986. — 272 с.
13. Детали машин: учеб.-метод. пособие для студентов машиностроительных специальностей: в 3 ч. / под общ. ред. А.Т. Скойбеды. — Минск: БНТУ, 2022. — Ч. 2: Соединения деталей машин. — 179 с.
14. Прецессионные редуцирующие механизмы для приводных устройств различного назначения: моногр. / П.Н. Громыко, Д.М. Макаревич, Л.Г. Доконов [и др.]. — Могилев: БРУ, 2013. — 272 с.
15. Детали машин: учеб.-метод. пособие для студентов машиностроительных специальностей: в 3 ч. / под общ. ред. А.Т. Скойбеды. — Минск: БНТУ, 2024. — Ч. 3: Валы и опоры деталей машин. — 147 с.
16. Кирдяшев, Ю.Н. Многопоточные передачи дифференциального типа / Ю.Н. Кирдяшев. — 2-е изд., перераб. и доп. — Л.: Машиностроение, 1981. — 223 с.

PROTASENYA Oleg N., Ph. D. in Eng., Assoc. Prof.

Associate Professor of the Department “Mechanical Engineering and Machine Parts”¹

E-mail: olegnikpro@gmail.com

KALINA Alla A., Ph. D. in Eng., Assoc. Prof.

Head of the Department “Mechanical Engineering and Machine Parts”¹

E-mail: a.kalina@mail.ru

¹Belarusian National Technical University, Minsk, Republic of Belarus

Received November 24, 2025.

ANALYTICAL APPROACH TO DETERMINING THE ANGULAR COORDINATES OF LINKS OF PLANETARY MECHANISMS

The article considers the generally accepted kinematic theory of calculation of planetary mechanisms, based on the principle of equivalence of the real and reversed mechanisms (Willis method). The paper proposes evaluation criteria (relative angular velocity of the satellite; number of satellite teeth engaged with the central wheel per unit of time) that prove, using specific examples of calculating a planetary mechanism and its reversed versions (planetary with zero inversion and differential with arbitrary inversion), the equivalence of the real kinematic scheme and its virtual states. A universal equation is also provided for determining the rotation angles of the satellite during one revolution of the sun gear. An algorithm is given for distributing circumferential forces and their reactions in the engagement of the satellite and central wheels based on the Archimedean lever. The paper considers the issues of complex rotational motion of a planetary mechanism's satellite, determines the relative and absolute gear ratios between the mechanism's links, and calculates the satellite's force balance.

Keywords: planetary series, differential mechanism, Willis method for planetary gears, relative angular velocity, law of lever forces

DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2026-1-74-23-30>

References

1. Kudryavtsev V.N. *Detali mashin* [Machine parts]. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1980. 464 p. (in Russ.).
2. Kudryavtsev V.N., et al. *Planetarnye peredachi* [Planetary transmissions]. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1977. 536 p. (in Russ.).
3. Rudenko N.F. *Planetarnye peredachi: teoriya, primeneniye, raschet i proektirovaniye* [Planetary gears: theory, application, calculation and design]. Moscow, Leningrad, Mashgiz Publ., 1947. 756 p. (in Russ.).
4. Rudenko V.N. *Planetarnye i volnovye peredachi* [Planetary and wave gears]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1980. 148 p. (in Russ.).
5. Tkachenko V.A. *Proektirovaniye mnogosatellitnykh planetarnykh peredach* [Designing multi-satellite planetary transmissions]. Kharkov, Kharkovskiy universitet Publ., 1961. 182 p. (in Russ.).
6. Baranov G.G. *Kurs teorii mekhanizmov i mashin* [Course of theory of mechanisms and machines]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1975. 494 p. (in Russ.).
7. *Detali mashin. Ch. 1. Mekhanicheskie peredachi* [Machine parts. Part 1. Mechanical gears]. Minsk, Belorusskiy natsionalnyy tekhnicheskii universitet Publ., 2019. 215 p. (in Russ.).
8. Smirnov L.P. Issledovanie vrashchatelnogo dvizheniya pri pomoshchi treugolnikov skorostey [Investigation of rotational motion using velocity triangles]. *Vestnik inzhenerov i tekhnikov*, 1932, no. 8 (in Russ.).
9. Semenov M.V. *Teoriya odno- i dvukhstupenchatykh planetarnykh peredach* [Theory of single- and two-stage planetary gears]. Moscow, Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1966. 164 p. (in Russ.).
10. Kudryavtsev V.N. *Planetarnye peredachi* [Planetary transmissions]. Moscow, Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1966. 308 p. (in Russ.).
11. Kudryavtsev V.N., et al. *Kursovoe proektirovaniye detaley mashin* [Course design of machine parts]. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1984. 400 p. (in Russ.).
12. Krasnenkov V.I., Vashets A.D. *Proektirovaniye planetarnykh mekhanizmov transportnykh mashin* [Design of planetary mechanisms of transport vehicles]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1986. 272 p. (in Russ.).
13. *Detali mashin. Ch. 2. Soedineniya detaley mashin* [Machine parts. Part 2. Machine parts connections]. Minsk, Belorusskiy natsionalnyy tekhnicheskii universitet Publ., 2022. 179 p. (in Russ.).
14. Gromyko P.N., et al. *Pretsessionnye redutsiruyushchie mekhanizmy dlya privodnykh ustroystv razlichnogo naznacheniya* [Precession reduction mechanisms for various purpose drive devices]. Mogilev, Belorussko-Rossiyskiy universitet Publ., 2013. 272 p. (in Russ.).
15. *Detali mashin. Ch. 3. Valy i opory detaley mashin* [Machine parts. Part 3. Shafts and supports of machine parts]. Minsk, Belorusskiy natsionalnyy tekhnicheskii universitet Publ., 2024. 147 p. (in Russ.).
16. Kirdyashev Yu.N. *Mnogopotochnye peredachi differentsialno-go tipa* [Multithreaded differential type transfers]. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1981. 223 p. (in Russ.).