

УДК 539

Л.В. СТЕПАНОВА, д-р физ.-мат. наук, проф.
заведующий кафедрой математического моделирования в механике¹
E-mail: Stepanova.lv@ssau.ru

Д.В. ЧАПЛИЙ
аспирант кафедры математического моделирования в механике¹
E-mail: Chapliy.dv@ssau.ru

О.Н. БЕЛОВА
доцент кафедры математического моделирования в механике¹
E-mail: BelovaONik@yandex.ru

¹Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация

Поступила в редакцию 14.10.2025.

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ НАКОПЛЕНИЯ ПОВРЕЖДЕНИЙ И ЭВОЛЮЦИИ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ У ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ В РЕЖИМЕ ПОЛЗУЧЕСТИ

Работа посвящена исследованию и анализу конечно-элементных (КЭ) расчетов выполненного большого цикла вычислительных экспериментов деформирования пластины с разрезом в условиях установившейся ползучести, на основании которых выявлен степенной автомодельный характер распределения функции сплошности (поврежденности) и составляющих напряжения в непосредственной близости вершины выреза на второй и третьей стадии ползучести в поврежденной среде в связанной постановке задачи, когда параметр сплошности входит в конституциональные соотношения. КЭ-расчеты полей напряжений и сплошности вблизи кончика дефекта проведены с использованием мощной платформы SIMULIA Abaqus с привлечением утилиты UMAT, интегрирующей процесс развития повреждений в вычислительный сценарий метода конечных элементов (МКЭ). В работе реализовано компьютерное моделирование одноосного растяжения пластины, ослабленной центральным горизонтальным разрезом или наклонным разрезом в режиме ползучести, в рамках которого в вычислительные алгоритмы включен прирост повреждений, прогрессирующий с течением времени согласно классической механической модели нарастания повреждений Качанова–Работнова по степенному закону для различных значений показателей степеней кинетического уравнения и степенного определяющего уравнения с концепцией истинного напряжения в связанной постановке. Численное исследование и анализ полученных КЭ-представлений полей напряжений и сплошности в окрестности кончика трещины для целого ряда постоянных материала явно обнаруживает автомодельный характер распределения полей напряжений и поврежденности вблизи кончика дефекта степенного типа. Выявлена структура решения и найдены значения показателей степеней в автомодельной переменной и автомодельном представлении решения, которое можно интерпретировать как промежуточное автомодельное решение второго типа согласно классификации Г.И. Баренблатта. Показано, что обнаруженное автомодельное свойство решения можно интерпретировать как автомодельную асимптотику дальнего поля сплошности и напряжений. Также на извлеченных из МКЭ-расчетов зависимостях напряжения от расстояния от кончика разреза, воспроизведенных в двойных логарифмических координатах, наглядно проявляется асимптотическое поведение, отвечающее ближнему полю напряжений, характеризующееся полным отсутствием сингулярности в непосредственной близости вершины разреза.

Ключевые слова: поврежденность, сплошность, модель Качанова–Работнова, поля у вершины трещины, UMAT, асимптотика поля напряжений, автомодельность

DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2026-1-74-56-65>

Введение. Многие важные элементы конструкций, используемые на электростанциях, химических заводах, в авиационной отрасли, постоянно подвергаются воздействию повышенных температур. Возможность точного прогнозирования срока службы элементов конструкций важна при проектировании компонентов, работающих при высоких температурах [1–5], основной причиной разрушения которых на практике является рост трещин при ползучести. Эффективные модели распространения трещин необходимы для того, чтобы критически важные части элементов конструкций продолжали выполнять свои функции даже при наличии трещин. Поэтому в последние годы разработке эффективных методов прогнозирования роста трещин и уточненной оценке напряженно-деформированного состояния в компонентах, работающих при высокой температуре, уделяется все больше внимания с привлечением концепций механики поврежденности [1–8]. Для решения задачи оценки полей напряжений и деформаций у вершины трещины особый интерес представляют модели, которые основаны на континуальной механике повреждений. Сейчас механика поврежденности стала самостоятельной областью механики деформируемых сред, систематическим предметом, строго соответствующим термодинамическим основам механики сплошных сред и сосредоточенным на влиянии несплошностей, микродефектов, повреждений на общие характеристики механической реакции твердых материалов на приложенную нагрузку [9–13].

Анализ влияния процессов накопления повреждений вблизи вершины дефекта с позиций континуальной механики поврежденности привлекал внимание ученых с 80–90-х годов XX века [14–17]. Главный вывод, к которому приходят авторы: во всех случаях поведение напряжений и скоростей деформации существенно отличается от таковых в задаче, где не учитывается процесс накопления повреждений, кроме того, вблизи вершины трещины либо существенно снижается, либо полностью отсутствует сингулярность напряжений и скорости деформации. Отличительной особенностью такого класса задач является асимптотический анализ полей напряжений в окрестности вершины трещины. В различных вариациях математических формулировок краевых задач в связанной постановке авторы, принадлежащие к различным научным школам, приходят к общему и отчетливому осознанию влияния процесса накопления повреждений у вершины трещины: рост повреждений существенным образом сказывается на асимптотическом поведении поля напряжений, меняя его в сторону ослабления сингулярности поля напряжений либо к полному отсутствию таковой. Ранее при исследовании явлений роста повреждений у вершины выреза доминирующее положение занимал именно асимптотический

анализ полей для сред, свойства которых сочетают нарастание поврежденности и ползучести, а также в связанных постановках задач в связках «упругость — поврежденность», «пластичность — поврежденность». Следует отметить, что ключевая ценность работ [14–17] — аналитические (асимптотические) решения задач оценки напряженно-деформированного состояния и поля сплошности вблизи разреза в сопряженной постановке задачи «поврежденность — ползучесть». Однако асимптотические решения не позволяют непосредственно получить решение задачи для конкретного элемента конструкции с заданной сложной геометрией и сложной системы нагрузок, поскольку они могут быть получены в рамках идеализации постановки задачи при рассмотрении бесконечного тела с полубесконечной трещиной.

В целях интеграции процессов накопления повреждений в расчетную схему МКЭ с начала 2000-х годов и чуть ранее начинают разрабатываться пользовательские процедуры пакетов, реализующих его [18]. Однако разработка пользовательских процедур и сейчас представляет собой самостоятельную, сложную задачу. В настоящей работе, являющейся продолжением цикла исследований, выполненных в [1–8], проведен численный расчет полей сплошности у вершины трещины в условиях установившейся ползучести посредством включения (интеграции) скалярной меры поврежденности (сплошности) в вычислительные утилиты МКЭ [1–5].

Подробности и особенности МКЭ-вычислений полей напряжений и сплошности у вершины выреза. В МКЭ-комплексе SIMULIA Abaqus выполнена симуляция растяжения металлической пластины с центральным горизонтальным и наклонным разрезами с учетом деградации механических свойств материала вследствие накопления поврежденности в режиме ползучести в двумерной постановке задачи (для случаев плоского напряженного (ПНС) и плоско-деформированного состояний (ПДС)). Для численного моделирования полей в окрестности вершины используется степенной закон Бейли–Нортон и степенное эволюционное уравнение (используется хрестоматийная модель Качанова–Работнова (КР)):

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij} &= \frac{3}{2} B \left(\frac{\sigma_{eff}}{\psi} \right)^{n-1} \frac{s_{ij}}{\psi} t^m; \quad \frac{d\psi}{dt} = -A \left(\frac{\sigma_{eff}}{\psi} \right)^l; \\ \sigma_{eff} &= \alpha \sigma_1 + \beta \sigma_{kk} + (1 - \alpha - \beta) \sigma_e; \\ \sigma_e &= \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11} \sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2} \quad (\text{ПНС}); \\ \sigma_e &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} \quad (\text{ПДС}), \end{aligned} \quad (1)$$

где σ_{ij} — компоненты напряжений; ε_{ij} — компоненты деформаций; ψ — сплошность; s_{ij} — девиатор напряжений; $A, B, m, n, l, \alpha, \beta$ — постоянные

материала, определяемые экспериментально: B , n — постоянные степенного закона установившейся ползучести Бейли–Нортон, A , m — постоянные степенного кинетического уравнения, описывающего эволюцию накопления повреждений, α , β — постоянные материала, определяющие эквивалентное напряжение; σ_e — интенсивность напряжений; σ_1 — максимальное главное напряжение; σ_{kk} — гидростатическое напряжение.

Модель Бейли–Нортон установившейся ползучести (1) посредством пользовательской процедуры UMAT (User Material) пакета SIMULIA Abaqus рассматривается вместе с кинетическим уравнением накопления поврежденности КР в связанной постановке задачи (в комбинации «ползучесть — поврежденность»). Вычисления проведены для классического степенного закона теории установившейся ползучести и степенного эволюционного уравнения модели КР (1) и их обобщений с помощью разработанной пользовательской программы UMAT для широкой совокупности констант металлов и сплавов [1–3].

Для численного нахождения и анализа зон активного накопления повреждений и областей полностью поврежденного материала вблизи вершины разреза в режиме ползучести написана, верифицирована и использована программа UMAT, моделирующая степенные соотношения (1) в КЭ-вычислениях. Для выполнения КЭ-расчета с созданной пользовательской подпрограммой необходимо идентифицировать ее в SIMULIA Abaqus в расчетной задаче. Для этого создается материал через меню программного комплекса SIMULIA Abaqus Materials дерева проекта [6]. Постоянные материала задаются в меню Mechanical Constants. В коде UMAT они описаны в меню ELASTIC PROPERTIES. Во время расчета UMAT вызывается для каждой материальной точки на каждой итерации расчетного временного шага. В рамках вычислительного эксперимента проведено компьютерное КЭ-моделирование одноосного нагружения пластины с центральным разрезом. КЭ-модель пластины имеет размеры $0,1 \times 0,1$ м. Трещина моделируется разрезом с закругленными вершинами, длина и радиус которых составляет 10^{-2} и 10^{-6} м соответственно. Постоянные материала, фигурирующие в определяющих уравнениях и кинетическом законе (1), соответствуют нержавеющей стали $n = 2, 3$, конструкционным сталям $n = 4, 5, 9$, чистой меди $n = 5$, титановым и алюминиевым сплавам $n = 7$. Во всех расчетах полагалось, что $m = 0,7n$, что обосновано экспериментально [5]. Постоянные материала, используемые в численном эксперименте, сведены в таблицу 1.

Результаты МКЭ-анализа показаны для случая ПНС на рисунке 1, для ПДС — на рисунках 2–4.

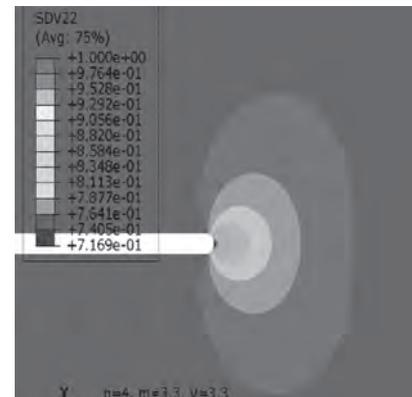
На рисунках 1–4 показаны конфигурации областей активного накопления повреждений у вершины трещины с течением времени. Проведена

Таблица 1 — Постоянные материала
Table 1 — Material constants

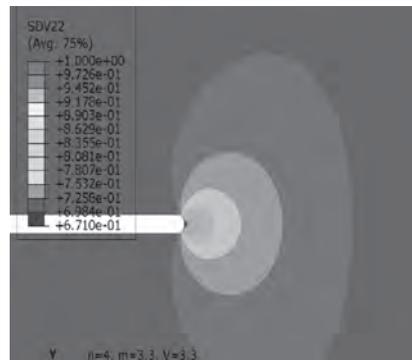
Модель	n	B , $(\text{H}/\text{мм}^2)^{-n}/\text{ч}$	m	A , $(\text{H}/\text{мм}^2)^{-m}/\text{ч}$
I	3	$1 \cdot 10^{-13}$	2,1	0,10
II	4	$1 \cdot 10^{-16}$	2,8	0,10
III	5	$5 \cdot 10^{-19}$	3,5	0,10
IV	6	$1 \cdot 10^{-21}$	4,2	0,01
V	7	$1 \cdot 10^{-23}$	4,9	0,01
VI	8	$1 \cdot 10^{-24}$	5,6	0,01

серия расчетов для ряда материалов с различными постоянными материала n , m и l .

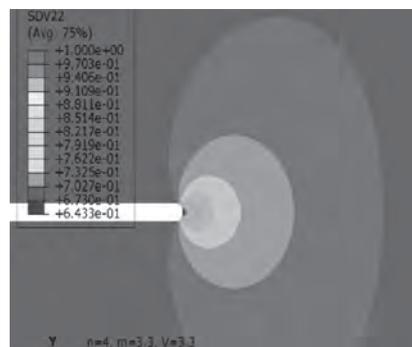
В ходе проведенного исследования были построены конфигурации областей поврежденного



a



b



c

Рисунок 1 — Картины распределений сплошности у вершины трещины при ПНС для временных шагов 5,000 (a), 10,000 (b) и 15,000 (c) часов

Figure 1 — Patterns of continuity distributions at the crack tip at a plane stress state for time steps of 5,000 (a), 10,000 (b) and 15,000 (c) hours

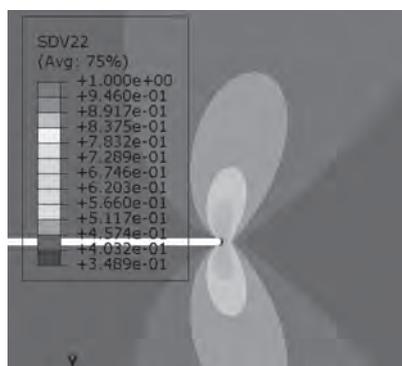


a

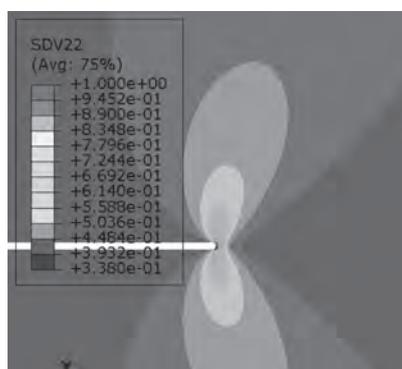


b

Рисунок 2 — Картины распределений сплошности у вершины трещины при ПДС для временных шагов 2000 (a) и 2500 (b) часов
Figure 2 — Patterns of the continuity distribution at the crack tip at a plane strain state for time steps of 2,000 (a) and 2,500 (b) hours

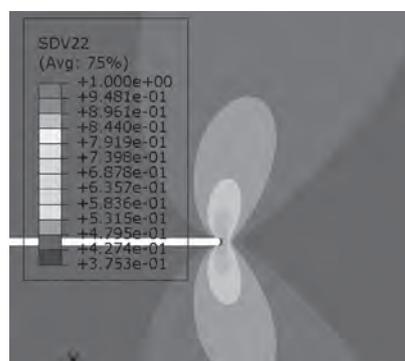


a

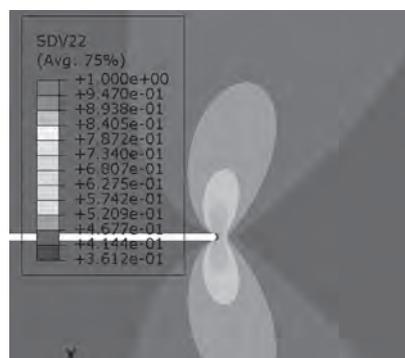


b

Рисунок 4 — Картины распределений сплошности у вершины трещины при ПДС для временных шагов 4000 (a) и 4500 (b) часов
Figure 4 — Patterns of the continuity distribution at the crack tip at the plane strain state for time steps of 4,000 (a) and 4,500 (b) hours



a



b

Рисунок 3 — Картины распределений сплошности у вершины трещины при ПДС для временных шагов 3000 (a) и 3500 (b) часов
Figure 3 — Patterns of the continuity distribution at the crack tip at the plane strain state for time steps of 3,000 (a) and 3,500 (b) hours

материала (областей активного накопления повреждений) как для ПНС, так и ПДС.

Асимптотический анализ полей напряжений и сплошности у вершины трещины. Центральной задачей выполненнх МКЭ-вычислений является выделение асимптотического поведения полей напряжений и сплошности вблизи закругленной вершины трещины и интервалов, где действует асимптотика. КЭ-расчеты дают возможность найти угловые и радиальные зависимости напряжений и сплошности у вершины трещины. Проанализирована асимптотика поля напряжений у вершины трещины на основании рассмотрения радиальных зависимостей напряжений от расстояния от кончика трещины. Показано, что радиальное распределение напряжений обладает степенной асимптотикой, параметры которой определены для различных значений постоянных материала. Показано, что радиальное распределение напряжений отличается от асимптотического поведения, диктуемого классическим решением Хатчинсона–Райса–Розенгрена [23–25]:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \left(\frac{C^*}{BI_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \bar{\sigma}_{ij}(\theta, n); \quad (2)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}(r, \theta) = B \left(\frac{C^*}{BI_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \bar{\varepsilon}_{ij}(\theta, n).$$

Однако графики, иллюстрирующие радиальные распределения напряжений у вершины трещины, в двойных логарифмических координатах показывают иное распределение, обусловленное уменьшением сплошности. Найдена новая асимптотика поля напряжений, обуславливаемая процессами развития повреждений:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(r, \theta) &= \bar{C} r^s \bar{\sigma}(\theta, n); \\ \dot{\epsilon}_{ij}(r, \theta) &= B \bar{C}^n r^{sn} \bar{\epsilon}_{ij}(\theta, n); \\ \psi(r, \theta) &= 1 - r^\gamma g(\theta), \end{aligned} \quad (3)$$

где степени, фигурирующие в решении, определяются из КЭ-распределений.

Показано, что распределения напряжений обладают свойством автомодельности [19–21] — подобия распределений характеристик процесса накопления поврежденности и временной эволюции напряжений и деформаций вблизи вершины трещины:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(r, \theta, t) &= (At)^{\frac{-1}{m}} \Sigma_{ij}(R, \theta); \\ \psi(r, \theta, t) &= \Psi(R, \theta); R = r(tA\bar{C})^{\frac{-1}{sm}}. \end{aligned} \quad (4)$$

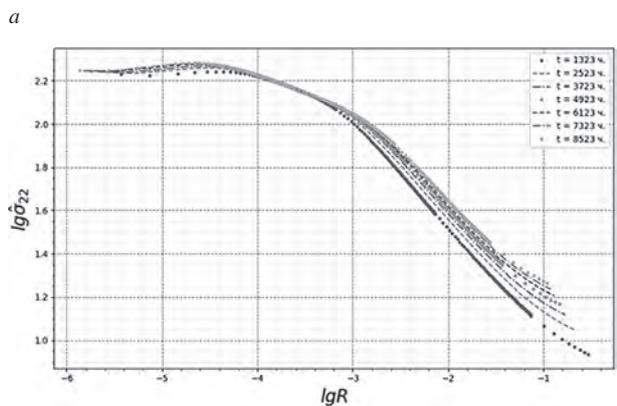
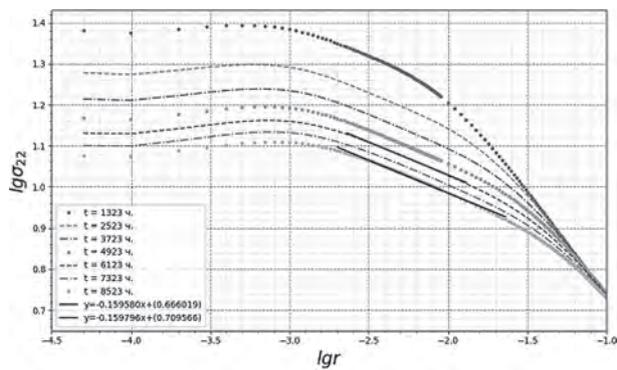


Рисунок 5 — Радиальные распределения компоненты тензора напряжений $\sigma_{22}(r, \varphi = 0)$ при ползучести с учетом развития поврежденности ($n = 3$): *a* — зависимости от радиальной координаты r в области ползучести для различных временных интервалов, включая асимптотические кривые для двух моментов времени; *b* — аналогичные зависимости, но в терминах автомодельной радиальной координаты R

Figure 5 — Radial distributions of the stress tensor component $\sigma_{22}(r, \varphi = 0)$ under creep, taking into account the development of damage ($n = 3$): *a* — dependencies on the radial coordinate r in the creep region for various time intervals, including asymptotic curves for two time points; *b* — similar dependencies, but in terms of the self-similar radial coordinate R

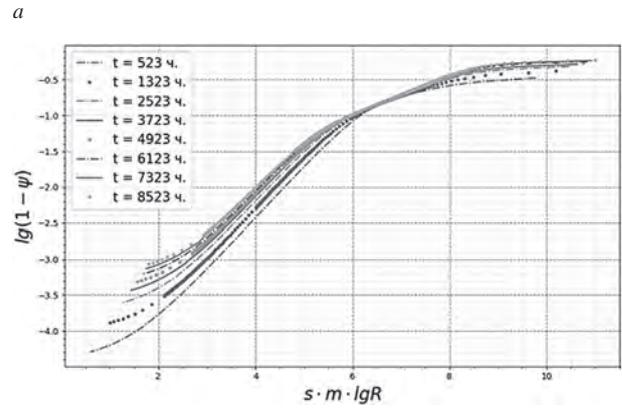
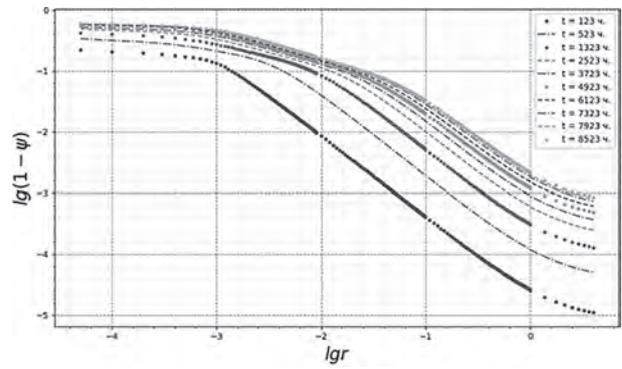


Рисунок 6 — Радиальные распределения параметра поврежденности $1-\psi$ в двойных логарифмических координатах ($n = 3$): *a* — эволюция поврежденности $1-\psi$ в зависимости от радиальной координаты r для различных моментов времени; *b* — кривые зависимости параметра поврежденности $1-\psi$ от автомодельной радиальной координаты R

Для различных материалов определены численно, на основании МКЭ-вычислений, параметры автомодельной степенной асимптотики.

На рисунках 5 *a* и 6 *a* видно, что радиальные распределения компонент тензора напряжений и поврежденности проявляют асимптотическое поведение. На рисунках 5 *b* и 6 *b* можно наблюдать слияние кривых, соответствующих разным временам. Видно, что кривые в терминах автомодельных переменных сливаются в единую кривую, что подтверждает автомодельный характер решения в зоне ползучести.

Полученные значения степени в автомодельном решении (4) сведены в таблицу 2.

Таблица 2 — Полученные значения показателя степени s
Table 2 — Obtained values of the exponent s

Константа материала n	Показатель степени s
3	-0,752
4	-0,534
5	-0,428
6	-0,357
7	-0,311
8	-0,295

Конфигурация зон полностью разрушенного материала. Проведенные МКЭ-вычисления позволяют определить геометрию зоны полностью поврежденного материала (в которой материал не может сопротивляться приложенной нагрузке). На рисунке 7 представлен результат МКЭ-расчета, где самым темным цветом показана область с минимальным значением сплошности, которую можно интерпретировать как область, в которой достигнуто критическое значение сплошности. Ее геометрия хорошо согласуется с асимптотическими решениями [7, 8]. На рисунке 8 представлена зона с выпадающими конечными элементами, демонстрирующими локализацию зоны полного повреждения материала у вершины трещины.

Дополнительно на рисунке 9 показан процесс снижения значения параметра сплошности у вершины трещины и формирование выпадающих элементов, которые можно интерпретировать как образование пор и вакансий у вершины трещины.

Написанный код процедуры UMAT (инкорпорирование степенного эволюционного закона в расчетный МКЭ-алгоритм и связанность полей напряжений и поврежденности) позволяет наблюдать образование пор, их рост и слияние у вершины трещины, что продемонстрировано на рисунке 10.

Критическое значение параметра поврежденности — это свойство материала, представляющее уровень повреждения, при котором материал перестает сопротивляться приложенным нагрузкам. Это не фиксированное значение, оно определяется экспериментально для каждого конкретного



Рисунок 7 — Область с критически низким значением сплошности, показанная примыкает к круговому вырезу
Figure 7 — Area with a critically low continuity value is adjacent to the circular notch

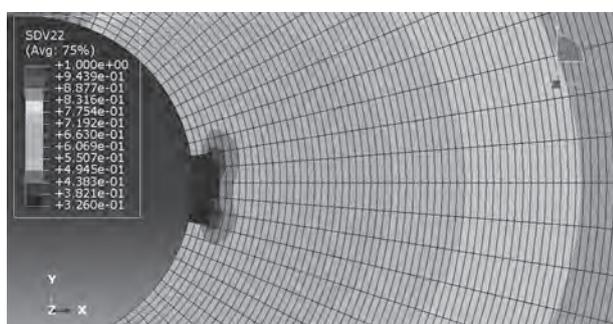
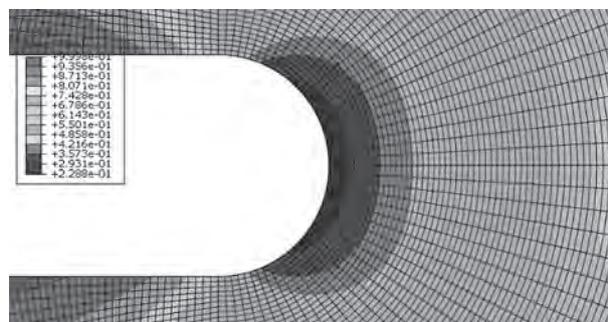
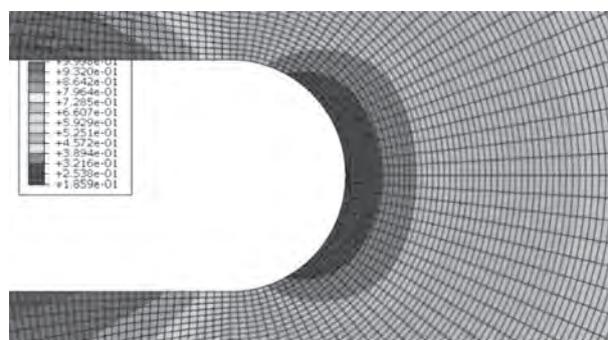


Рисунок 8 — Зона полностью разрушенного материала у фронта трещины
Figure 8 — Zone of completely damaged material at the crack front

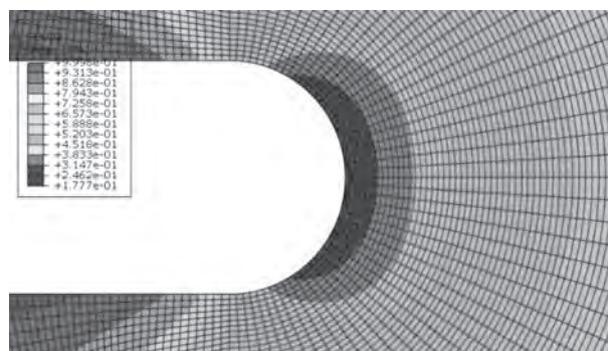
материала, часто с помощью испытаний на растяжение и путем численного моделирования. Для теоретической модели континуальной механики поврежденный критическое значение поврежденности часто упрощается до 1, чтобы представить



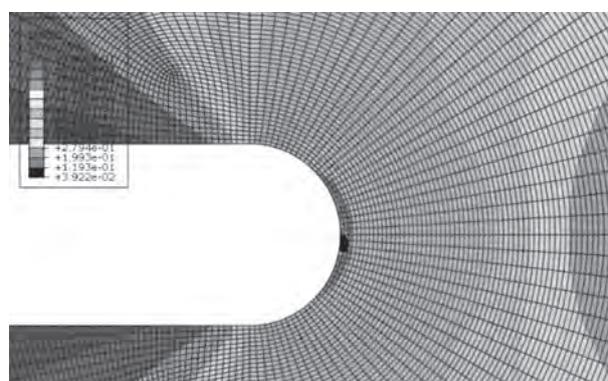
a



b



c



d

Рисунок 9 — Формирование зоны полностью разрушенного материала у фронта трещины ($n = 2$) для 4500 (a), 5000 (b), 5500 (c) и 6000 (d) часов у вершины трещины
Figure 9 — Formation of a zone of completely damaged material at the crack front ($n = 2$) for 4,500 (a), 5,000 (b), 5,500 (c) and 6,000 (d) hours at the crack tip

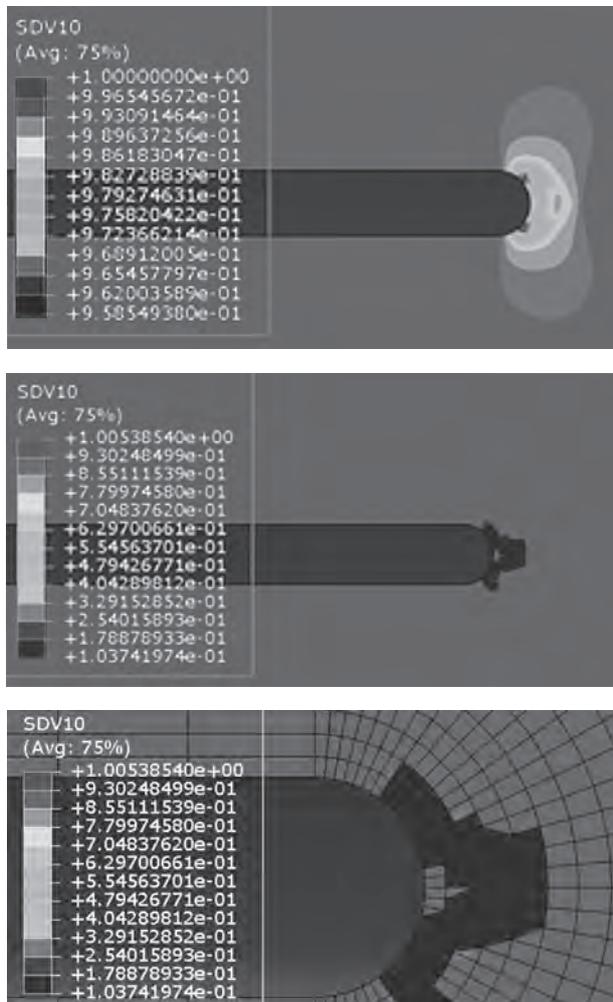


Рисунок 10 — Появление и слияние повреждений вблизи вершины разреза в режиме ползучести
 Figure 10 — Appearance and coalescence of damage near the crack tip under creep mode

полное исчерпание несущей способности образца, но на практике для обеспечения численной стабильности используется значение, немного меньшее, чем 1, например 0,95: оно часто используется при моделировании момента разрушения. В проведенном нами вычислительном эксперименте минимальное значение параметра сплошности, при котором впервые наблюдаются выпадающие конечные элементы, составляет 0,0392 (см. рисунок 9). Экспериментально критическое значение поврежденности определяется путем выявления уровня повреждения образца материала непосредственно перед его разрушением во время испытаний на растяжение. Значение, полученное в результате физического эксперимента, затем используется для проверки достоверности численной модели, базирующейся на КЭ-анализе. Величина критического повреждения зависит от тестируемого материала и его свойств, истории обработки и даже геометрических факторов.

Заключение и выводы. В работе построено численное КЭ-решение задачи определения полей напряжений и сплошности у вершины трещины

в режиме ползучести с применением пользовательской программы UMAT, позволяющей инкорпорировать скалярный параметр сплошности в вычислительный сценарий МКЭ и определить эволюцию зоны активного накопления повреждений у вершины трещины. Выполнены визуализация и анализ полей напряжений и сплошности у вершины трещины: построены угловые и радиальные распределения напряжений у вершины трещины. Радиальные распределения напряжений, построенные в двойных логарифмических координатах, позволили найти новую асимптотику напряжений, обусловленную процессами развития повреждений. Данная асимптотика, определяемая численно, отличается от классической асимптотики ХРР [23–25]. С помощью полученного МКЭ-решения удалось обнаружить диапазоны изменения расстояния от вершины дефекта и временные интервалы, на которых справедливо автомодельное представление решения задачи о накоплении поврежденности у вершины трещины в условиях ползучести, подчиняющейся степенному эволюционному уравнению для среды со степенными конституциональными соотношениями.

Выполненная симуляция процессов нарастания повреждений вблизи вершины трещины при ползучести, основанная на МКЭ, может обеспечить многообещающую систематическую основу для анализа процесса роста трещин. Обнаруженное новое асимптотическое поведение напряжений у вершины трещины с численно определяемыми параметрами может служить отправной точкой для построения аналитических решений, базирующихся на асимптотической теории и методах возмущений. Направлением будущих исследований является разработка и интеграция в МКЭ-расчет моделей анизотропных повреждений при ползучести [26–28].

Авторы благодарят Российский научный фонд (проект № 25-21-00272).

Список литературы

1. Численное исследование асимптотики поврежденности материала в окрестности фронта трещины при ползучести / Л.В. Степанова, О.Н. Белова, Д.В. Чаплий, Ю.С. Быкова // Прикладная механика и техническая физика. — 2025. — № 4(392). — С. 169–180. — DOI: <https://doi.org/10.15372/PMTF202415561>.
2. Белова, О.Н. Применение пользовательской подпрограммы UMAT для решения задач континуальной механики (обзор) / О.Н. Белова, Д.В. Чаплий, Л.В. Степанова // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. — 2021. — Т. 27, № 3. — С. 46–73. — DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-3-46-73>.
3. Белова, О.Н. Компьютерное моделирование роста трещин. Метод молекулярной динамики / О.Н. Белова, Л.В. Степанова, Д.В. Чаплий // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. — 2020. — Т. 26, № 4. — С. 44–55. — DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-4-44-55>.
4. Исследование асимптотики поля напряжений в окрестности вершины трещины в условиях ползучести с учетом поврежденности / Д.В. Чаплий, О.Н. Белова, Л.В. Степанова, Ю.С. Быкова // Вестник ПНИПУ. Механика. — 2024. — № 3. — С. 17–38.

5. Чаплий, Д.В. Параметрическое исследование полей, ассоциированных с вершиной трещины, в условиях ползучести с учетом процессов накопления поврежденности с использованием UMAT / Д.В. Чаплий, Л.В. Степанова, О.Н. Белова // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер.: Физ.-мат. науки. — 2023. — Т. 27, № 3. — С. 509–529. — DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu2005>.
6. Быкова, Ю.С. Влияние процесса накопления повреждений на асимптотическое поведение полей напряжений в условиях ползучести образца с центральной трещиной / Ю.С. Быкова, Л.В. Степанова // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. — 2023. — Т. 29, № 4. — С. 7–25. — DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-4-7-25>.
7. Stepanova, L.V. Nonlinear eigenproblems arising from nonlinear fracture mechanics boundary value problems / L.V. Stepanova, E.M. Yakovleva // Procedia Structural Integrity. — 2022. — Vol. 37. — P. 908–919. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.02.025>.
8. Степанова, Л.В. Смешанное деформирование пластины с трещиной в условиях плоского напряженного состояния / Л.В. Степанова, Е.М. Яковлева // Вестник ПНИПУ. Механика. — 2014. — № 3. — С. 129–162.
9. Voreux, O. Towards a comprehensive regularized continuum damage mechanics model for fatigue crack growth / O. Voreux, S. Feld-Payet, P. Kanouté, S. Kruch // Engineering Fracture Mechanics. — 2025. — Vol. 328. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2025.111494>.
10. Jiang, L. Experimental data for damage mechanics simulation challenge / L. Jiang, L.J. Pyrak-Nolte, A. Bobet, H. Yoon // Engineering Fracture Mechanics. — 2025. — Vol. 320. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2025.111065>.
11. Wong, W.J. Damage mechanics model for correlating notch toughness in Charpy impact tests with fracture toughness in cracked static fracture tests / W.J. Wong, C.L. Walters // Engineering Fracture Mechanics. — 2025. — Vol. 320. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2025.111043>.
12. Damage mechanics coupled with a transfer learning approach for the fatigue life prediction of bronze/steel diffusion welded bimetallic material / Q. Xia, C. Ji, Z. Zhan [et al.] // International Journal of Fatigue. — 2025. — Vol. 190. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2024.108631>.
13. Xiao, Y. Uncertainty-quantified parametrically upscaled continuum damage mechanics (UQ-PUCDM) model from microstructural characteristics induced uncertainties in unidirectional composites / Y. Xiao, D. Ozturk, S. Ghosh // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2025. — Vol. 434. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2024.117571>.
14. Murakami, S. Asymptotic fields of stress and damage of a mode I creep crack in steady-state growth / S. Murakami, T. Hirano, Y. Liu // International Journal of Solids and Structures. — 2000. — Vol. 37, iss. 43. — P. 6203–6220. — DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(99\)00267-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(99)00267-X).
15. Murakami, S. Computational methods for creep fracture analysis by damage mechanics / S. Murakami, Y. Liu, M. Mizuna // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2000. — Vol. 183, iss. 1–2. — P. 15–33. — DOI: [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(99\)00209-1](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00209-1).
16. Jun, Z. The asymptotic study of fatigue crack growth based on damage mechanics / Z. Jun, Z. Xing // Engineering Fracture Mechanics. — 1995. — Vol. 50, iss. 1. — P. 131–141. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(94\)00144-7](https://doi.org/10.1016/0013-7944(94)00144-7).
17. Meng, L. Eigenspectra and orders of singularity at a crack tip for a power-law creeping medium / L. Meng, S.B. Lee // International Journal of Fracture. — 1998. — Vol. 92, iss. 1. — P. 55–70. — DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1007460017129>.
18. Lemaitre, J. Isotropic and anisotropic damage law of evolution / J. Lemaitre, R. Desmorat // Handbook of Materials Behavior Models: 3 vol. — San Diego, San Francisco, New York, Boston, London, Sydney, Tokyo: Academic Press, 2001. — Vol. II. — P. 513–524. — DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-012443341-0/50057-0>.
19. Баренблатт, Г.И. Критерии подобия и масштабы для кристаллов / Г.И. Баренблатт, Г.С. Голицын // Физическая мезомеханика. — 2017. — Т. 20, № 1. — С. 116–119.
20. Barenblatt, G.I. Scaling, self-similarity, and intermediate asymptotics / G.I. Barenblatt. — Cambridge: Cambridge University Press, 1996. — 412 p. — DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9781107050242>.
21. Баренблатт, Г.И. Автомодельные явления - анализ размерностей и скейлинг: учеб. пособ. / Г.И. Баренблатт; авторский пер. с англ. изд., испр. и доп., при редакционном участии В.М. Простокишина. — Долгопрудный: Интеллект, 2009. — 215 с.
22. Hutchinson, J.W. Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material / J.W. Hutchinson // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 1968. — Vol. 16, iss. 1. — P. 13–31. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(68\)90014-8](https://doi.org/10.1016/0022-5096(68)90014-8).
23. Rice, J.R. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material / J.R. Rice, G.F. Rosengren // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 1968. — Vol. 16, iss. 1. — P. 1–12. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(68\)90013-6](https://doi.org/10.1016/0022-5096(68)90013-6).
24. Hutchinson, J.W. Plastic stress and strain fields at a crack tip / J.W. Hutchinson // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 1968. — Vol. 16, iss. 5. — P. 337–342. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(68\)90021-5](https://doi.org/10.1016/0022-5096(68)90021-5).
25. An open-source finite element toolbox for anisotropic creep and irradiation growth: application to tube and spacer grid assembly / F.E. Aguzzi, S.M. Rabazzi, M.S. Armoa [et al.] // Nuclear Engineering and Design. — 2025. — Vol. 444. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nucengdes.2025.114345>.
26. Microstructure-based modelling of the anisotropic creep behaviour in additively manufactured Inconel 718 / K. Kianinejad, F. Czediwoda, U. Glatzel [et al.] // Materials Science and Engineering: A. — 2025. — Vol. 945. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.msea.2025.149029>.
27. Creep properties and life model of anisotropic Ni-based single crystal superalloys over a wide temperature range / S. Gu, H. Gao, Z. Wen [et al.] // International Journal of Mechanical Sciences. — 2024. — Vol. 261. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmesci.2023.108674>.
28. Jiang, H. Numerical analysis and application of Nishihara creep nonlinear damage model considering ubiquitous joints / H. Jiang, A. Jiang // Tunnelling and Underground Space Technology. — 2025. — Vol. 157. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tust.2024.106335>.

STEPANOVA Larisa V., D. Sc. in Phys. and Math., Prof.

Head of the Department of Mathematical Modeling in Mechanics¹

E-mail: Stepanova.lv@ssau.ru

CHAPLIY Dmitry V.

Postgraduate Student of the Department of Mathematical Modeling in Mechanics¹

E-mail: Chapliy.dv@ssau.ru

BELOVA Oksana N.

Associate Professor of the Department of Mathematical Modeling in Mechanics¹

E-mail: BelovaONik@yandex.ru

¹Samara National Research University, Samara, Russian Federation

NUMERICAL AND ANALYTICAL MODELING OF DAMAGE ACCUMULATION PROCESSES AND EVOLUTION OF STRESS-STRAIN STATE AT THE CRACK TIP IN CREEP MODE

The work is devoted to the study and analysis of finite element (FE) calculations performed by a large cycle of computational experiments of plate deformation with a section under steady-state creep conditions, which revealed a power-law self-similar distribution of the continuity function (damage) and stress components in the immediate vicinity of the tip of the section at the second and third stages of creep in a damaged medium in a related formulation of the problem, when the continuity parameter is included in the constitutive relations. The FE computations of stress fields and continuity near the tip of the defect were carried out using the powerful SIMULIA Abaqus platform using the UMAT utility, which integrates the process of damage development into the computational scenario of the finite element method (FEM). The paper implements computer modeling of uniaxial stretching of a plate weakened by a central horizontal section or an inclined section in creep mode, in which computational algorithms include damage growth that progresses over time according to the classical mechanical model of damage growth by Kachanov–Rabotnov according to a power law for various values of exponents of the kinetic equation and the power determining equation with the concept of true tension in a related formulation. Numerical study and analysis of the obtained FE representations of stress and continuity fields in the vicinity of the crack tip for a number of material constants clearly reveals a self-similar distribution of stress fields and damage near the tip of a power-type defect. The structure of the solution is revealed and the values of the exponents in the self-similar variable and the self-similar representation of the solution are found, which can be interpreted as an intermediate self-similar solution of the second type according to the classification of G.I. Barenblatt. It is shown that the discovered self-similar property of the solution can be interpreted as self-similar asymptotics of the far field of continuity and stresses. Also, the stress dependences extracted from FEM calculations on the distance from the tip of the incision, reproduced in double logarithmic coordinates, clearly demonstrate the asymptotic behavior corresponding to the near-field stress, characterized by the complete absence of a singularity in the immediate vicinity of the tip of the incision.

Keywords: damage, continuity, Kachanov–Rabotnov model, fields at the crack tip, UMAT, stress field asymptotics, self-similarity

DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2026-1-74-56-65>

References

1. Stepanova L.V., Belova O.N., Chapliy D.V., Bykova Yu.S. Chislennoe issledovanie asimptotiki povrezhdennosti materiala v okrestnosti fronta treshchiny pri polzuchesti [Numerical study of material damage asymptotics near the crack front under creep]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 2025, no. 4(392), pp. 169–180. DOI: <https://doi.org/10.15372/PMTF202415561> (in Russ.).
2. Belova O.N., Chapliy D.V., Stepanova L.V. Primenenie polzovatel'skoy podprogrammy UMAT dlya resheniya zadach kontinual'noy mekhaniki (obzor) [Application of the UMAT subroutine for solving continuum mechanics problems (overview)]. *Vestnik of Samara University. Natural science series*, 2021, vol. 27, no. 3, pp. 46–73. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-3-46-73> (in Russ.).
3. Belova O.N., Stepanova L.V., Chapliy D.V. Kompyuternoe modelirovanie rosta treshchin. Metod molekulyarnoy dinamiki [Computer simulation of crack growth. Molecular dynamics method]. *Vestnik of Samara University. Natural science series*, 2020, vol. 26, no. 4, pp. 44–55. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-4-44-55> (in Russ.).
4. Chapliy D.V., Belova O.N., Stepanova L.V., Bykova Yu.S. Issledovanie asimptotiki polya napryazheniy v okrestnosti vershinny treshchiny v usloviyakh polzuchesti s ucheto povrezhdennosti [Asymptotic behaviour of the crack tip fields under creep regime taking into account damage accumulation processes]. *PNRPU mechanics bulletin*, 2024, no. 3, pp. 17–38 (in Russ.).
5. Chapliy D.V., Stepanova L.V., Belova O.N. Parametricheskoe issledovanie polya, assotsirovannykh s vershinoy treshchiny, v usloviyakh polzuchesti s ucheto protsessov nakopleniya povrezhdennosti s ispolzovaniem UMAT [Parametric analysis of the stress-strain and continuity fields at the crack tip under creep regime taking into account the processes of damage accumulation using UMAT]. *Journal of Samara State Technical University. Ser. physical and mathematical sciences*, 2023, vol. 27, no. 3, pp. 509–529. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu2005> (in Russ.).
6. Bykova Yu.S., Stepanova L.V. Vliyaniye protsessa nakopleniya povrezhdeniy na asimptoticheskoye povedeniye polya napryazheniy v usloviyakh polzuchesti obraztsa s tsentralnoy treshchinoy [Influence of the process of damage accumulation on the asymptotic behavior of stress fields under creep conditions of a sample with a central crack]. *Vestnik of Samara University. Natural science series*, 2023, vol. 29, no. 4, pp. 7–25. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-4-7-25> (in Russ.).
7. Stepanova L.V., Yakovleva E.M. Nonlinear eigenvalue problems arising from nonlinear fracture mechanics boundary value problems. *Procedia structural integrity*, 2022, vol. 37, pp. 908–919. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.02.025>.
8. Stepanova L.V., Yakovleva E.M. Smeshannoye deformirovaniye plastiny s treshchinoy v usloviyakh ploskogo napryazhennogo sostoyaniya [Mixed-mode loading of the cracked plate under plane stress conditions]. *PNRPU mechanics bulletin*, 2014, no. 3, pp. 129–162 (in Russ.).

9. Voreux O., Feld-Payet S., Kanouté P., Kruch S. Towards a comprehensive regularized continuum damage mechanics model for fatigue crack growth. *Engineering fracture mechanics*, 2025, vol. 328. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2025.111494>.
10. Jiang L., Pyrak-Nolte L.J., Bobet A., Yoon H. Experimental data for damage mechanics simulation challenge. *Engineering fracture mechanics*, 2025, vol. 320. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2025.111065>.
11. Wong W.J., Walters C.L. Damage mechanics model for correlating notch toughness in Charpy impact tests with fracture toughness in cracked static fracture tests. *Engineering fracture mechanics*, 2025, vol. 320. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2025.111043>.
12. Xia Q., et al. Damage mechanics coupled with a transfer learning approach for the fatigue life prediction of bronze/steel diffusion welded bimetallic material. *International journal of fatigue*, 2025, vol. 190. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2024.108631>.
13. Xiao Y., Ozturk D., Ghosh S. Uncertainty-quantified parametrically upscaled continuum damage mechanics (UQ-PUCDM) model from microstructural characteristics induced uncertainties in unidirectional composites. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 2025, vol. 434. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2024.117571>.
14. Murakami S., Hirano T., Liu Y. Asymptotic fields of stress and damage of a mode I creep crack in steady-state growth. *International journal of solids and structures*, 2000, vol. 37, iss. 43, pp. 6203–6220. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(99\)00267-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(99)00267-X).
15. Murakami S., Liu Y., Mizuno M. Computational methods for creep fracture analysis by damage mechanics. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 2000, vol. 183, iss. 1–2, pp. 15–33. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(99\)00209-1](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00209-1).
16. Jun Z., Xing Z. The asymptotic study of fatigue crack growth based on damage mechanics. *Engineering fracture mechanics*, 1995, vol. 50, iss. 1, pp. 131–141. DOI: [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(94\)00144-7](https://doi.org/10.1016/0013-7944(94)00144-7).
17. Meng L., Lee S.B. Eigenspectra and orders of singularity at a crack tip for a power-law creeping medium. *International journal of fracture*, 1998, vol. 92, iss. 1, pp. 55–70. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1007460017129>.
18. Lemaître J., Desmorat R. Isotropic and anisotropic damage law of evolution. *Handbook of materials behavior models*, 2001, vol. II, pp. 513–524. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-012443341-0/50057-0>.
19. Barenblatt G.I., Golitsyn G.S. Kriterii podobiya i masshtaby dlya kristallov [Similarity criteria and scales for crystals]. *Fizicheskaya mezomekhanika*, 2017, vol. 20, no. 1, pp. 116–119 (in Russ.).
20. Barenblatt G.I. *Scaling, self-similarity, and intermediate asymptotics*. Cambridge, Cambridge University Press, 1996. 412 p. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9781107050242>.
21. Barenblatt G.I. *Scaling*. Cambridge University Press, 2003. 188 p.
22. Hutchinson J.W. Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material. *Journal of the mechanics and physics of solids*, 1968, vol. 16, iss. 1, pp. 13–31. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(68\)90014-8](https://doi.org/10.1016/0022-5096(68)90014-8).
23. Rice J.R., Rosengren G.F. Plain strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material. *Journal of the mechanics and physics of solids*, 1968, vol. 16, iss. 1, pp. 1–12. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(68\)90013-6](https://doi.org/10.1016/0022-5096(68)90013-6).
24. Hutchinson J.W. Plastic stress and strain fields at a crack tip. *Journal of the mechanics and physics of solids*, 1968, vol. 16, iss. 5, pp. 337–342. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(68\)90021-5](https://doi.org/10.1016/0022-5096(68)90021-5).
25. Aguzzi F.E., et al. An open-source finite element toolbox for anisotropic creep and irradiation growth: Application to tube and spacer grid assembly. *Nuclear engineering and design*, 2025, vol. 444. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nucengdes.2025.114345>.
26. Kianinejad K., et al. Microstructure-based modelling of the anisotropic creep behaviour in additively manufactured Inconel 718. *Materials science and engineering: A*, 2025, vol. 945. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.msea.2025.149029>.
27. Gu S., et al. Creep properties and life model of anisotropic Ni-based single crystal superalloys over a wide temperature range. *International journal of mechanical sciences*, 2024, vol. 261. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2023.108674>.
28. Jiang H., Jiang A. Numerical analysis and application of Nishihara creep nonlinear damage model considering ubiquitous joints. *Tunnelling and underground space technology*, 2025, vol. 157. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tust.2024.106335>.