

УДК 539.3

С.Л. ГАВРИЛЕНКО

Институт механики металлополимерных систем им. В.А. Белого НАН Беларуси, Гомель

## МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СТАЛЬНОЙ ЗАГОТОВКИ В МЕТАЛЛУРГИЧЕСКОЙ ПЕЧИ С УЧЕТОМ ЗАВИСИМОСТИ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

*Предлагается метод расчета напряженно-деформированного состояния стальной заготовки в металлургической печи с учетом зависимости теплофизических характеристик от температуры, основанный на модификации метода упругих решений А.А. Ильюшина*

**Ключевые слова:** термонапряженное состояние, стальная заготовка, билинейные свойства, теплофизические характеристики, конечно-разностный аналог, фиктивные силы, метод упругих решений А.А. Ильюшина

Относительно простая постановка задачи о термонапряженном состоянии [1, 2], допускающая полуаналитическое решение, формулируется при нагреве заготовки в методической печи, когда внешние силовые факторы отсутствуют. Принимается, что имеет место термоупругопластическое напряженное состояние, температурное поле в сечении заготовки известно и заданы зависимости основных теплофизических характеристик (плотности, теплоемкости, теплопроводности, модуля пластичности и функции пластичности) от температуры. Считая, что распределение температуры в печи однородно, температурное поле можно описать, решая двумерное уравнение теплопроводности с переменными коэффициентами [3–5].

В предположении однородности температурного поля вдоль оси заготовки имеем двумерную запись уравнения теплопроводности [6]:

$$c(T)\rho(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k(T)\frac{\partial T}{\partial y}\right).$$

Начальное условие:  $T=(x,y,0)=T_0$ . Далее будем использовать граничные условия 3 рода, моделирующие теплообмен по закону Ньютона [1]:

$$k(T)\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = \alpha_1(\theta(t)-T(x,y,t)).$$

Здесь  $c(T)$ ,  $\rho(T)$  и  $k(T)$  — температурные зависимости удельной теплоемкости, плотности и коэффициента теплопроводности,  $\theta(t)$  — закон изменения температу-

ры в печи,  $\Gamma$  — граница сечения заготовки,  $\frac{\partial}{\partial n}$  — производная по внешней нормали к границе сечения. Температурное поле в сечении заготовки определялось исходя из начальной температуры  $T_0=393$  К и закона изменения температуры в печи  $\theta(t)=1023+0,0975t$ .

Расчет поля напряжений в заготовке, длина которой существенно больше размеров поперечного сечения, можно проводить в предположении плоской деформации, когда вектор перемещений имеет вид:

$$\bar{u} = (u_1, u_2, 0), \quad u_1 = u_1(x_1, x_2), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2).$$

Для связи вектора перемещений с тензором деформаций используем соотношения Коши [2]:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial u_{\beta}}{\partial x_{\alpha}}\right); \quad \alpha, \beta = 1, 2,$$

которые выполняются, если квадратичными членами градиента вектора перемещений можно пренебречь. Для связи тензора напряжений и тензора деформаций используем соотношения теории малых упругопластических деформаций [7, 8]:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = \frac{2\sigma_u}{\varepsilon_u} \varepsilon_{ij} + (K\varepsilon - \gamma\theta)\delta_{ij}, \\ \sigma = K(T)\varepsilon, \\ \sigma_u = 3G(T)(1 + \omega(\varepsilon_u, T))\varepsilon_u, \quad \varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}, \\ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i = 0; \end{cases}$$

где  $\mu, \lambda$  — параметры Ламе (взяты из упругой постановки),  $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha_p$ ,  $\alpha_p$  — коэффициент линейного теплового расширения,  $\theta = \frac{T - T_0}{T_0}$  — относительная температура,

$\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$  — тензор напряжений и девиатор тензора деформаций соответственно,  $\sigma, \varepsilon$  — первые инварианты тензоров напряжений и деформаций,  $\sigma_u, \varepsilon_u$  — вторые инварианты тензоров напряжений и деформаций,  $K$  — коэффициент объемного расширения,  $\omega(\varepsilon_u, T)$  — функция пластичности,  $G(T)$  — модуль пластичности,  $\rho F_i$  — массовые силы.

Функция пластичности для стального бруса имеет следующий вид:

$$\omega(\varepsilon_u) = \begin{cases} 0, & \varepsilon_u < \varepsilon_0(T) \\ \frac{G_1(T)}{G(T)} - 1, & \varepsilon_u \geq \varepsilon_0(T). \end{cases}$$

Если подставить соотношения теории малых упруго-пластических деформаций в уравнения равновесия, получим систему двух уравнений в частных производных относительно тензора деформаций и первого инварианта тензора деформаций. В указанную систему уравнений входит известная функция относительной температуры:

$$6G(1 + \omega(\varepsilon_u, T)) \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j} + (K - 2G(1 + \omega(\varepsilon_u, T))) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} + \rho F_i^0 = \gamma \frac{\partial \theta}{\partial x_i},$$

где  $\rho F_i$  имеет следующий аналитический вид:

$$\rho F_i^0 = \frac{\partial K}{\partial x_i} \varepsilon - \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} \theta + 6 \left( G_T (1 + \omega(\varepsilon_u, T)) + G(T) \frac{\partial \omega}{\partial T} \right) \frac{\partial T}{\partial x_j} \varepsilon_{ij}.$$

Запись повторяющихся индексов обозначает суммирование по соответствующим индексам. В качестве области, в которой ищется решение, рассматривается квадратное сечение заготовки со стороной  $l_0 = 0,125$  м.

Для последующих шагов вычисления тензора деформаций необходимо учитывать значения девиатора и первого инварианта тензора деформаций с предыдущего шага. Из этого следует, что фиктивные массовые силы будут иметь следующий вид:

$$\rho F_i^1 = \rho F_i^0 + \frac{\partial K}{\partial x_i} \varepsilon_0 + 6 \left( G_T (1 + \omega(\varepsilon_u^0 + \varepsilon^i, T)) + G(T) \frac{\partial \omega(\varepsilon_0 + \varepsilon^i)}{\partial T} \right) \frac{\partial T}{\partial x_j} \varepsilon_{ij}^0.$$

Граничные условия записываются следующим образом:

- для нижней грани:

$$u_1(x_1, 0) = 0, u_2(x_1, 0) = 0, x_1 \in [0, l_0],$$

- для верхней и боковых граней (область  $A_\sigma$ ) в случае отсутствия усилий:

$$\sigma_{\alpha\beta} n_\beta = 3G(T) (1 + \omega(\varepsilon_u, T)) (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) n_\beta + (K\varepsilon - \gamma\theta) n_\alpha = 0, x_1, x_2 \in A_\sigma.$$

Внешняя нормаль ( $n_\alpha$ ) на границе сечения в безразмерных координатах описывается следующим образом:

$$x_1 = 0, x_2 \in [0, 1]: n_1 = -1; n_2 = 0;$$

$$x_1 = 1, x_2 \in [0, 1]: n_1 = 1; n_2 = 0;$$

$$x_1 \in [0, 1]; x_2 = 1: n_1 = 0; n_2 = 1;$$

$$x_1 \in [0, 1]; x_2 = 0: n_1 = 0; n_2 = -1.$$

После подстановки значений координат внешней нормали имеем следующие граничные условия:

$$x_1 = 0; x_2 \in [0, 1]: 6G(T) (1 + \omega(\varepsilon_u, T)) u_{1,1} + K(T) (u_{1,1} + u_{2,2}) - \gamma(T) \theta = 0; u_{2,1} + u_{1,2} = 0;$$

$$x_1 = 1; x_2 \in [0, 1]: 6G(T) (1 + \omega(\varepsilon_u, T)) u_{1,1} + K(T) (u_{1,1} + u_{2,2}) - \gamma(T) \theta = 0; u_{2,1} + u_{1,2} = 0;$$

$$x_2 = 1; x_1 \in [0, 1]: 6G(T) (1 + \omega(\varepsilon_u, T)) u_{2,2} + K(T) (u_{1,1} + u_{2,2}) - \gamma(T) \theta = 0; u_{2,1} + u_{1,2} = 0.$$

На нижней границе:  $u_1=0, u_2=0$ . Предположим, что функция относительной температуры  $\theta$  известна из численного решения температурной задачи. Введем следующие допущения:

1. Перемещения малы (квадратичными членами градиента перемещений можно пренебречь).
2. Изменением размеров сечения заготовки при нагреве можно пренебречь и определять вектор перемещения на недеформированной координатной сетке.
3. В соотношении для температурной деформации используются параметры Ламе, зависящие от температуры. Расчет напряжений выполняется по среднему значению температуры в промежутке между последовательными состояниями.

При решении системы построим сеточный аналог двумерного вектора перемещений [6]. Для получения системы линейных алгебраических уравнений относительно узловых значений записываются следующие конечноразностные операторы:

$$D_{11} u_{ij} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j} + u_{i,j-1} - u_{i,j}}{h^2},$$

$$D_{22} u_{ij} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j} + u_{i,j-1} - u_{i,j}}{h^2},$$

$$D_{12} u_{ij} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{4h^2}.$$

В частном примере каждая грань сечения разбивалась на 10 равных отрезков с общим числом узлов (11×11) и шагом по горизонтали и вертикали  $h=0,1$  (рисунок 1).

Для аппроксимации частных производных по относительной температуре используем конечноразностные аналоги второго порядка:

$$\theta_{,1} = \frac{\theta_{j+1} - \theta_{j-1}}{2h}, \theta_{,2} = \frac{\theta_{i+1,j} - \theta_{i-1,j}}{2h}.$$

В приведенной системе уравнений  $i, j=1, \dots, 9$ . Таким образом, имеем 162 уравнения относительно 242 переменных ( $u_{1,j}, u_{2,j}, i, j=0, \dots, 10$ ). Недостающие 80 уравнений получим из конечноразностного аналога второго порядка аппроксимации граничных условий в безразмерном виде. Для построения системы линейных алгебраических уравнений сеточные значения вектора перемещений ( $u_{1,j}, u_{2,j}$ ) и функции относительной температуры  $\theta_{ij}$  были преобразованы в векторы при помощи равенств:

$$X_{11i+j} = u_{1,j}, X_{121+11i+j} = u_{2,j}, \Sigma_{11i+j} = \theta_{ij}.$$

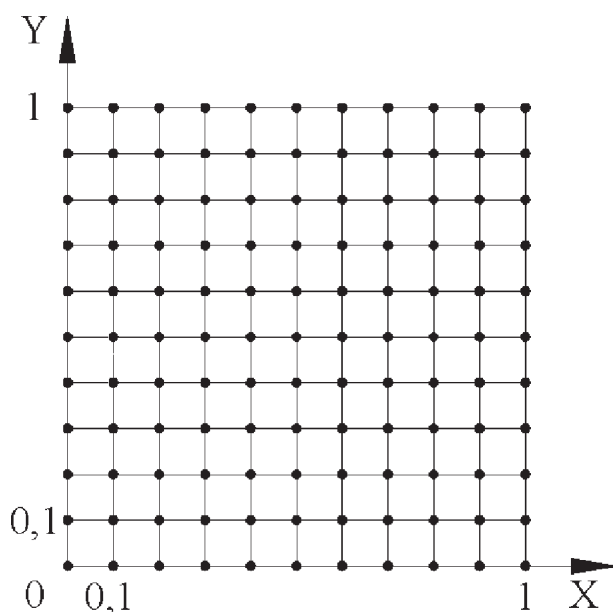


Рисунок 1 — Схема дискретизации сечения заготовки

Полученная система включает 242 линейных алгебраических уравнений с неизвестным вектором перемещений и правой частью из компонент вектора относительной температуры.

Для определения перемещений в сечении заготовки систему линейных алгебраических уравнений с определителем, отличным от нуля, необходимо решать матричным методом. Для расчета тензора деформаций используется конечноразностный аналог соотношений Коши, для определения тензора напряжений — зависимости модуля пластичности и функции пластичности от температуры и соотношения теории малых упруго-пластических деформаций. В итоге на каждом шаге по времени находятся распределения двумерного вектора перемещений, тензора деформации (4 компоненты), тензора напряжений (5 компонент).

## Заключение

Предложенный метод позволяет рассчитать НДС стальной заготовки, находящейся в металлургической печи, температура которой известна. Предлагается решать задачу как несвязанную (отдельно тепловую и термопластическую). Выписана точная математическая постановка задачи относительно узловых значений двумерного вектора перемещений. Выписанный метод позволяет рассчитать НДС в условиях плоскодеформированного состояния с учетом билинейности и зависимости основных теплофизических характеристик от температуры.

## Список литературы

1. Тимошпольский, В.И. Теоретические основы теплофизики и термомеханики в металлургии / В.И. Тимошпольский, Ю.С. Постольник, Д.Н. Андрианов. — Минск: Бел. наука, 2005. — 560 с.
2. Новацкий, В. Теория упругости / В. Новацкий. — М.: Мир, 1975. — 872 с.
3. Математическая модель нагрева призмы при граничных условиях 3-го рода / Ю.М. Плещачевский [и др.] // Инженерно-физический журнал. — 2007. — Т. 80, № 6. — С. 3—8.
4. Решение квазилинейного уравнения теплопроводности с учетом температурных зависимостей плотности, теплоемкости и теплопроводности. / С.Л. Гавриленко [и др.] // Литье и металлургия. — 2007. — № 2. — С. 164—168.
5. Численное решение задачи о нагреве заготовки с учетом температурной зависимости коэффициента температуропроводности / В.И. Тимошпольский [и др.] // Литье и металлургия. — 2006. — Т. 38, № 2. — С. 38—41.
6. Самарский, А.А. Вычислительная теплопередача / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. — М.: УРСС, 2003. — 782 с.
7. Старовойтов, Э.И. Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости / Э.И. Старовойтов. — Гродно: Белгуд, 2001. — 344 с.
8. Ленский, В.С. Введение в теорию пластичности / В.С. Ленский. — М.: МГУ, 1968. — Вып. 1. — 109 с. — Вып. 2. — 91 с.

Gavrilenko S.L.

**The modified method of calculation of SSS of steel preparation in the metallurgical furnace taking into account dependence of heat-physical characteristics from of temperature**

The method of calculation of SSS of steel preparation in the metallurgical furnace taking into account dependence of heat-physical temperature characteristics based on updating of a method of elastic decisions of A.A. Ilyushin has been offered.

Поступила в редакцию 01.04.2010