

УДК 539.375

Ш.Г. ГАСАНОВ, д-р техн. наук

Азербайджанский технический университет, г. Баку

КОГЕЗИОННАЯ ТРЕЩИНА С ЧАСТИЧНО КОНТАКТИРУЮЩИМИ БЕРЕГАМИ В СЕЧЕНИИ ДОРОЖНОГО ПОКРЫТИЯ

Рассматривается случай продольной трещины со связями между берегами в концевых зонах в сечении дорожного покрытия, когда берега трещины частично вошли в контакт. Считается, что под действием внешней нагрузки (вдавливания колеса в неровную поверхность покрытия) в зоне сжимающих напряжений происходит частичное закрытие берегов трещины.

Ключевые слова: дорожное покрытие, когезионная трещина, усилия в связях концевых зон трещины, частичное закрытие трещины, контактная зона, контактные напряжения

Введение. В настоящее время важной общегосударственной задачей является увеличение объема строительства автомобильных дорог при одновременном повышении качества, надежности и долговечности строительства. В связи с этим на первый план выдвигаются проблемы научно обоснованных методов расчета конструкций на прочность и долговечность, позволяющих на основе полного учета реального состояния материала осуществлять оптимальное проектирование строительных конструкций, обладающих повышенной прочностью, надежностью и долговечностью. Все это в полной мере относится к дорожным покрытиям. Разработка расчетных моделей исследования повреждения дорожного покрытия представляет собой актуальную проблему. Значительный интерес в связи с этим представляют дефекты типа трещин. К настоящему времени методы прогнозирования несущей способности дорожного покрытия при наличии трещины не получили своего решения. Разработка этих методов будет способствовать повышению живучести дорожных покрытий, обоснованному выбору конструктивных параметров покрытия на стадии проектирования.

Постановка задачи. Рассмотрим напряженно-деформированное состояние дорожного покрытия в процессе эксплуатации. В упругий поверхностный слой с неровной верхней гранью ($y = \delta(x)$) вдавливается колесо (каток). Пусть в сечении покрытия имеется прямолинейная трещина со связями между берегами в концевых зонах длиной $2\ell_1$, расположенная на отрезке $|x_1| \leq \ell_1$, $y = -h/2$ (рисунок 1). В центре трещины разместим начало локальной системы координат x_1, y_1 , ось x_1 которой совпадает с линией трещины и параллельна оси x . Берега трещины вне концевых зон приняты свободными от внешних нагрузок. Считается, что при действии внешней нагрузки (вдавливании колеса в поверхность покрытия) взаимодействие между поверхностями в концевых зонах трещины характеризуется нормальными $q_{y_1}(x_1)$ и касательными $q_{x_1 y_1}(x_1)$ усилиями. Используется модель трещины

со связями между берегами в концевой зоне, получившая экспериментальное подтверждение для композиционных материалов [1]. В процессе нагружения при некотором соотношении физических и геометрических параметров покрытия будут появляться зоны сжимающих напряжений, в которых берега трещины могут войти в контакт, что приведет к появлению контактных напряжений $p_{y_1}(x_1)$ и $p_{x_1 y_1}(x_1)$ на данном участке берегов трещины. Принято, что зоны, в которых берега трещины вошли в контакт, примыкают к вершинам трещины, а их размеры заранее неизвестны и меньше размеров концевых зон трещины, в которых действуют силы сцепления.

Выделим примыкающие к вершинам части трещины $d_1 = \ell_1 - \lambda_1$ и $d_2 = \ell_1 - \lambda_2$ (концевые контактные зоны), в которых берега трещины вошли в контакт. Отметим, что в рассматриваемом случае трещина в покрытии состоит из трех областей: внутренняя и двух концевых зон. Внутренняя область трещины — это противоположные берега, свободные от нагрузок. Вторая область трещины — это концевые зоны $(\lambda_1, -d)$ и (d, λ_2) со связями между берегами. Третья область трещины — это концевые контактные зоны $(-\ell_1, \lambda_1)$ и (λ_2, ℓ_1) , где берега вошли в контакт.

Краевые условия рассматриваемой контактной задачи механики разрушения имеют вид

- при $y = \delta(x)$:

$$\sigma_n = 0, \tau_{nt} = 0 \text{ (вне контактной площадки);} \quad (1)$$

- при $y = \delta(x)$:

$$v_n = f(x) + \alpha x + C, \tau_{nt} = f\sigma_n \text{ (на площадке контакта);}$$

- при $y = -h$:

$$\left(\sigma_y - i\tau_{xy} \right)_I = \left(\sigma_y - i\tau_{xy} \right)_{II}, \left(u + iv \right)_I = \left(u + iv \right)_{II};$$

- при $y_1 = 0$:

$$\sigma_{y_1} = 0, \tau_{x_1 y_1} = 0 \quad (2)$$

(на свободных берегах трещины);

$$\sigma_{y_1} = q_{y_1}, \tau_{x_1 y_1} = q_{x_1 y_1} \quad \lambda_1 \leq x_1 \leq -d \text{ и } d \leq x_1 \leq \lambda_2;$$

$$\sigma_{y_1} = p_{y_1}, \tau_{x_1 y_1} = p_{x_1 y_1} \quad -\ell_1 \leq x_1 < \lambda_1 \text{ и } \lambda_2 < x_1 \leq \ell_1.$$

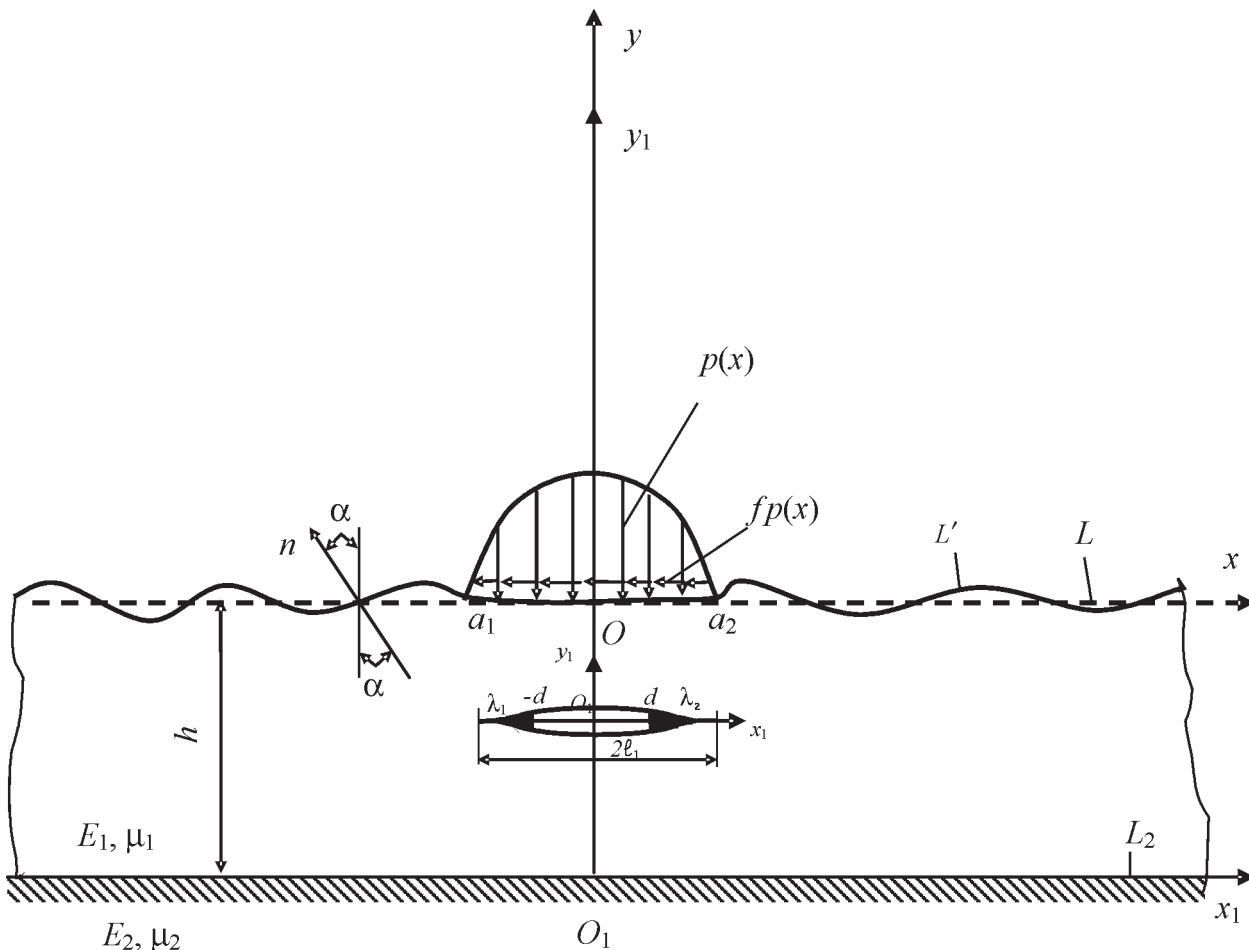


Рисунок 1 — Расчетная схема задачи о продольной когезионной трещине с частично контактирующими берегами в покрытии

При $y \rightarrow -\infty$ перемещения и напряжения исчезают.

Рассматривается некоторая реализация неровности внешней поверхности катания L' дорожного покрытия. Контур L' ($y = \delta(x)$) будем считать близким к прямолинейной форме, допуская лишь малые отклонения линии L' от прямой $y = 0$.

В условиях (1)–(2) принято, что на участке поверхности наружного слоя, где в него вдавливаются каток (колесо), имеют место силы сухого трения: вне участка контакта поверхность покрытия дороги свободна от внешних усилий. На границе раздела сред (покрытие и основной материал основания) имеют место условия полного сцепления; $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица; C — поступательное перемещение штампа (катка); α — угол поворота штампа.

Основные соотношения поставленной задачи должны быть дополнены уравнениями, связывающими раскрытия берегов конечных зон и усилия в связях, а также соотношениями для перемещений в контактных зонах трещины:

- при $-\ell_1 \leq x_1 < \lambda_1$ и $\lambda_2 < x_1 \leq \ell_1$:

$$v^+(x_1, 0) - v^-(x_1, 0) - i(u^+(x_1, 0) - u^-(x_1, 0)) = 0; \quad (3)$$

- при $\lambda_1 \leq x_1 \leq -d$ и $d \leq x_1 \leq \lambda_2$:

$$v^+(x_1, 0) - v^-(x_1, 0) - i(u^+(x_1, 0) - u^-(x_1, 0)) = C(x_1, \sigma_1) [q_{y_1}(x_1) - iq_{x_1 y_1}(x_1)]; \quad (4)$$

$$\sigma_1 = \sqrt{q_{y_1}^2 + q_{x_1 y_1}^2}.$$

Функция $C(x_1, \sigma_1)$ представляет собой эффективную податливость связей, зависящей от натяжения; σ_1 — модуль вектора усилий в связях; $(v^+ - v^-)$ — нормальная, $(u^+ - u^-)$ — касательная составляющие раскрытия берегов трещины.

Метод решения. Для решения поставленной контактной задачи используем метод, изложенный в [2]. Используем принцип суперпозиции. Первое напряженно-деформированное состояние пары «покрытие — основание» (без трещины) в каждом приближении найдено в [2].

На основании сказанного выше, краевые условия для второго напряженно-деформированного состояния покрытия с трещиной в нулевом приближении будут иметь вид

- при $y = 0$:

$$\sigma_y^{(0)} = 0, \quad \tau_{xy}^{(0)} = 0; \quad (5)$$

- при $y = -h$:

$$\sigma_y^{(0)} = 0, \quad \tau_{xy}^{(0)} = 0$$

- при $y_1 = 0$:

$$\begin{aligned} \sigma_{y_1}^{(0)} &= -\sigma_1^0(x_1), \tau_{x_1 y_1}^{(0)} = -\tau_1^0(x_1) \\ &\text{(на свободных берегах трещин);} \\ \sigma_{y_1}^{(0)} &= q_{y_1}^{(0)}(x_k) - \sigma_1^0(x_1), \tau_{x_1 y_1}^{(0)} = q_{x_1 y_1}^{(0)}(x_1) - \tau_1^0(x_1), \\ &\lambda_1^0 \leq x_1 \leq -d \text{ и } d \leq x_1 \leq \lambda_2^0; \\ \sigma_{y_1}^{(0)} &= p_{y_1}^{(0)}(x_k) - \sigma_1^0(x_1), \tau_{x_1 y_1}^{(0)} = p_{x_1 y_1}^{(0)}(x_1) - \tau_1^0(x_1), \\ &-\ell_1 \leq x_1 < \lambda_1^0 \text{ и } \lambda_2^0 < x_1 \leq \ell_1, \end{aligned}$$

где $\sigma_1^0(x_1)$ и $\tau_1^0(x_1)$ — нормальные и касательные напряжения, возникающие в сплошном покрытии по оси y_1 , причем $|x_1| \leq \ell$ в нулевом приближении от действия вдавливания колеса (катка) в дорожное покрытие. Функции $\sigma_1^0(x_1)$ и $\tau_1^0(x_1)$ найдены в [2].

Граничные условия задачи (5) с помощью формул Колосова-Мухелишвили [3] запишем в виде краевой задачи для отыскания двух аналитических функций $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$:

- при $y = 0$:

$$\Phi_0(z) + \overline{\Phi_0(z)} + z\overline{\Phi_0'(z)} + \overline{\Psi_0(z)} = 0; \quad (6)$$

- при $y = -h$:

$$\Phi_0(z) + \overline{\Phi_0(z)} + z\overline{\Phi_0'(z)} + \overline{\Psi_0(z)} = 0;$$

- при $y_1 = 0$:

$$\Phi_0(x_1) + \overline{\Phi_0(x_1)} + x_1\overline{\Phi_0'(x_1)} + \overline{\Psi_0(x_1)} = f^0(x_1),$$

где

$$f^0(x_1) = \begin{cases} -(\sigma_1^0 - i\tau_1^0) & \text{при } -d < x_1 < d; \\ q_{y_1}^{(0)} - iq_{x_1 y_1}^{(0)} - (\sigma_1^0 - i\tau_1^0) & \text{при } \lambda_1 \leq x_1 \leq -d \text{ и } d \leq x_1 \leq \lambda_2; \\ p_{y_1}^{(0)} - ip_{x_1 y_1}^{(0)} - (\sigma_1^0 - i\tau_1^0) & \text{при } -\ell_1 \leq x_1 < \lambda_1 \text{ и } \lambda_2 < x_1 \leq \ell_1. \end{cases}$$

Комплексные потенциалы $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ ищем в виде [4]

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^2 \int_{-\ell_k}^{\ell_k} \frac{g_k^0(t) dt}{t - z_k}; \quad (7)$$

$$\Psi_0(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^2 e^{-2i\alpha_k} \int_{-\ell_k}^{\ell_k} \left[\frac{g_k^0(t)}{t - z_k} - \frac{\overline{T_k} e^{i\alpha_k}}{(t - z_k)^2} g_k^0(t) \right] dt,$$

где $T_k = te^{i\alpha_k} + z_k^0$; $z_k = e^{-i\alpha_k}(z - z_k^0)$; $\alpha_0 = \alpha_2 = 0$; $z_0^0 = 0$; $z_2^0 = -ih$; $\ell_0 = \infty$; $\ell_2 = \infty$.

Удовлетворяя функциями (7) краевым условиям (6), после некоторых преобразований получаем систему из трех сингулярных интегральных уравнений относительно $g_0^0(t)$, $g_1^0(x_1)$, $g_2^0(t)$. Две неизвестные функции $g_0^0(t)$ и $g_2^0(t)$, найденные из решения системы сингулярных интегральных уравнений исключаются. После некоторых преобразований получим одно сингулярное интегральное уравнение относительно неизвестной функции $g_1^0(x_1)$. В безразмерных координатах $\eta = t/\ell_1$, $\xi = x_1/\ell_1$ относительно $g_1^0(\eta)$ оно имеет вид

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 \frac{g_1^0(\eta) d\eta}{\eta - \xi} + \\ &+ \int_{-1}^1 \left[g_1^0(\eta) R(\xi, \eta) + \overline{g_1^0(\eta)} S(\xi, \eta) \right] d\eta = \pi F_0(\xi), \quad (8) \\ &|\xi| < 1 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \frac{i(1 + \kappa_0)}{2G_1} g_1^0(x_1) &= \frac{\partial}{\partial x_1} [u_0^+ - u_0^- + i(v_0^+ - v_0^-)]; \\ F_0(\xi) &= \begin{cases} -(\sigma_1^0(\xi) - i\tau_1^0(\xi)) & \text{на } L_1'; \\ q_{y_1}^{(0)}(\xi) - iq_{x_1 y_1}^{(0)}(\xi) - (\sigma_1^0(\xi) - i\tau_1^0(\xi)) & \text{на } L_1''; \\ p_{y_1}^{(0)}(\xi) - ip_{x_1 y_1}^{(0)}(\xi) - (\sigma_1^0(\xi) - i\tau_1^0(\xi)) & \text{на } L_1'''. \end{cases} \end{aligned}$$

Интегральное уравнение (8) распадается на два действительных интегральных уравнений. В случае симметричной задачи, т.е. в случае трещины нормального разрыва, когда на берегах трещины действуют только нормальные усилия $\sigma_1^0(x_1)$, имеем

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 \frac{v_0(\eta) d\eta}{\eta - \xi} + \\ &+ \lambda \int_0^\infty \frac{(-1 - 2\tau - 2\tau^2 + e^{-2\tau})}{sh2\tau + 2\tau} \sin \lambda \tau (\eta - \xi) v_0(\eta) d\eta = \pi F_0^*(\xi), \quad (9) \\ &|\xi| < 1 \end{aligned}$$

$$F_0^*(\xi) = \begin{cases} -\sigma_1^0(\xi) & \text{на } L_1'; \\ q_{y_1}^{(0)}(\xi) - \sigma_1^0(\xi) & \text{на } L_1''; \\ p_{y_1}^{(0)}(\xi) - \sigma_1^0(\xi) & \text{на } L_1'''; \end{cases}$$

$$\frac{(1 + \kappa_0)v_0(x_1)}{2G_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} [v_0^+ - v_0^-],$$

где $\kappa_0 = 3 - 4\nu$; ν — коэффициент Пуассона; G_1 — модуль сдвига.

Если воспользоваться значением интеграла $\int_0^\infty \sin \tau x d\tau = 1/x$, принимаемом в обобщенном смысле Лебега, интегральное уравнение можно записать в виде

$$\int_{-1}^1 v_0(\eta) K_1(\eta - \xi) d\eta = \pi F_0^*(\xi), \quad |\xi| < 1, \quad (10)$$

где $K_1(\eta) = 2\lambda \int_0^\infty \frac{sh^2 \tau - \tau^2}{sh2\tau + 2\tau} \sin \lambda \tau \eta d\tau$.

Это уравнение можно преобразовать в интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\Phi_*(\xi) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\xi \frac{F_0^*(\eta) d\eta}{\sqrt{\xi^2 - \eta^2}} + \int_0^1 F_0^*(\eta, \xi) \Phi_*(\eta) d\eta, \quad 0 \leq \eta < 1, \quad (11)$$

где $F(\eta, \xi) = \lambda^2 \eta \int_0^\infty \frac{1+2\tau+2\tau^2-e^{-2\tau}}{sh2\tau+2\tau} J_0(\lambda\eta\tau) J_0(\lambda\xi\tau) \tau d\tau$;

$$v_0(x) = \begin{cases} 0, & x_1 > \ell; \\ \int_x^\ell \frac{u\Phi_*(u)du}{\sqrt{u^2-x_1^2}}, & 0 \leq x_1 < \ell; \end{cases}$$

$J_0(u)$ — функция Бесселя первого рода.

Интегральное уравнение Фредгольма второго рода сводится известным способом к системе из M алгебраических уравнений. В правые части этой системы входят неизвестные значения контактных напряжений $p_{y_1}^{(0)}(x_1)$ в узловых точках, принадлежащих конечным контактными зонам и усилия в связях $q_{y_1}^{(0)}(x_1)$.

Для определения контактных напряжений имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(v_0^+ - v_0^-) = 0 \text{ на } L_1''' \quad (12)$$

Требую выполнения условия (12) в узловых точках, содержащихся в конечных областях $(-\ell_1, \lambda_1^0)$, (λ_2^0, ℓ_1) , получаем недостающие уравнения для определения приближенных значений контактных напряжений $p_{y_1}^{(0)}(t_{m_1})$ в узловых точках

$$v_0(t_{m_1}) = 0 \quad (m_1 = 1, 2, \dots, M_1) \quad (13)$$

Для замкнутости системы, дающей решение задачи, не хватает двух уравнений, определяющих параметры λ_1^0 и λ_2^0 . Условиями, служащими для определения параметров λ_1^0 и λ_2^0 , являются условия конечности напряжений в окрестности вершин трещины

$$v_0(\ell_1) = 0, \quad v_0(-\ell_1) = 0.$$

В развернутом приближенном виде эти условия можно записать следующим образом

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1+\eta}}{\sqrt{1-\eta}} F_0^*(\eta) d\eta + \lambda^2 (a_{11} F_0 + b_{11} \bar{F}_0) + \\ & + \frac{\lambda^4}{2} [F_0(-b_{11}^2 - a_{11}^2 + a_{31} + a_{33}) + \\ & + F_0(-2a_{11}b_{11} + b_{31} + b_{33}) + 2(a_{33}F_2 + b_{33}F_2) + \\ & + (a_{32}F_1 + b_{32}F_1)] = 0; \\ & -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\eta}}{\sqrt{1+\eta}} F_0^*(\eta) d\eta + \lambda^2 (a_{11} F_0 + b_{11} F_0) + \\ & + \frac{\lambda^4}{2} [F_0(-b_{11}^2 - a_{11}^2 + a_{31} + a_{33}) + \\ & + F_0(-2a_{11}b_{11} + b_{31} + b_{33}) + 2(a_{33}F_2 + b_{33}F_2) - \\ & - (a_{32}F_1 + b_{32}F_1)] = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\lambda = \ell_1/h$; $F_n = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \xi^n \sqrt{1-\xi^2} F_0^*(\xi) d\xi$; коэффициенты

$a_{11}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, b_{11}, b_{31}, b_{32}, b_{33}$ находятся по формулам (V. 46, [4]) при $\alpha = 0$.

Используя построенное решение, соотношение (4) в случае трещины нормального разрыва можно записать в виде

$$v_0(x_1) = \frac{2G_1}{1+\kappa_0} \frac{d}{dx_1} [C(x_1, \sigma_1^0) q_{y_1}^0(x_1)] \text{ на } L_1'' \quad (15)$$

Это уравнение служит для определения усилий $q_{y_1}^{(0)}$ в связях между берегами в конечных зонах действия сил сцепления. Для построения недостающих алгебраических уравнений для определения приближенных значений напряжений $q_{y_1}^{(0)}(t_{m_2})$ потребуем выполнения условия (15) в узловых точках t_{m_2} ($m_2 = 1, 2, \dots, M_2$), содержащихся в конечных зонах L_1'' . При этом используется метод конечных разностей. В результате получена алгебраическая система из M_2 уравнений для определения приближенных значений $q_{y_1}^{(0)}(t_{m_2})$ в узловых точках конечных зон L_1'' .

При действии только касательных усилий на берегах трещины, т.е. в случае трещины поперечного сдвига, интегральное уравнение (8) преобразуется к следующему виду в безразмерных переменных относительно искомой функции $u_0(x_1)$

$$\int_{-1}^1 u_0(\eta) K_2(\eta - \xi) d\eta = \pi F_0^{**}(\xi), \quad |\xi| < 1, \quad (16)$$

где

$$K_2(\eta) = \lambda \int_0^\infty L(\tau) \sin \lambda \tau \eta d\tau; \quad L(\tau) = 2 \frac{sh^2 \tau - \tau^2}{sh^2 2\tau - 2\tau};$$

$$F_0^{**}(\xi) = \begin{cases} -\tau_1^0(\xi) & \text{на } L_1'; \\ q_{x_1 y_1}^{(0)}(\xi) - \tau_1^0(\xi) & \text{на } L_1''; \\ p_{x_1 y_1}^{(0)}(\xi) - \tau_1^0(\xi) & \text{на } L_1'''; \end{cases}$$

$$\frac{(1+\kappa_0)u_0(x_1)}{2G_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}(u_0^+ - u_0^-).$$

Учитывая, что функция $L(\tau)$ обладает следующими свойствами

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} L(\tau) = \frac{1}{2}; \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} L(\tau) = 1,$$

функцию $L(\tau)$ можно аппроксимировать следующим выражением $L(\tau) \approx th(\tau/2)$, верно отражающим поведение функции $L(\tau)$ в нуле и на бесконечности. Как отмечается в [4, 5], относительная погрешность аппроксимации не превышает 3,4 % при всех $0 \leq \tau \leq \infty$.

В этом случае интегральное уравнение (16) принимает вид

$$\frac{2\pi}{h} \int_{-1}^1 \frac{u_0(\eta) d\eta}{sh \frac{2\pi}{h}(\eta - \xi)} = \pi F_0^{**}(\xi), \quad |\xi| < 1. \quad (17)$$

Решение уравнения (17) в размерных (старых) переменных имеет вид

$$u_0(x_1) = \frac{1}{\pi ch Ax_1 \sqrt{th^2 Al_1 - th^2 Ax_1}} \times \left[-A \int_{-\ell_1}^{\ell_1} \frac{\sqrt{th^2 Al_1 - th^2 At}}{thAt - thAx_1} F_0^{**}(t) \frac{dt}{chAt} + C_* \right], \quad (18)$$

где $A = \frac{2\pi}{h}$; постоянная C_* определяется из условия

$$\int_{-\ell_1}^{\ell_1} u_0(t) dt = 0. \quad (19)$$

В полученное решение входят неизвестные усилия в связях $q_{x_1 y_1}^{(0)}$ и контактные напряжения $p_{x_1 y_1}^{(0)}$ в контактных концевых зонах. Для определения контактных напряжений имеем условие отсутствия раскрытия перемещений в концевых контактных зонах

$$u_0(x_1) = 0 \text{ на } L_1''', \quad (20)$$

где x_1 — абсцисса точек берегов трещины в концевых зонах $(-\ell_1, \lambda_1^0)$ и (λ_2^0, ℓ_1) .

Удовлетворяя условию (20), находим сингулярное интегральное уравнение для отыскания контактных напряжений $q_{x_1 y_1}^{(0)}$ в концевых зонах

$$-A \int_{-\ell_1}^{\ell_1} \frac{\sqrt{th^2 Al_1 - th^2 At}}{thAt - thAx_1} F_0^{**}(t) \frac{dt}{chAt} + C = 0, \quad (21)$$

где $C = \frac{1}{K(a)} \int_{-a}^a \Pi\left(\frac{a^2}{\tau^2}, a\right) \sqrt{a^2 - \tau^2} f_*(\tau) \frac{d\tau}{\tau}$; $a = thAl_1$; $f_*(y) = \tau_1^{(0)}(t)$; K, Π — полные эллиптические интегралы первого и третьего рода.

Уравнение (21) преобразуем к виду

$$A \int_{L_1+L_2} \frac{\sqrt{th^2 Al_1 - th^2 At}}{thAt - thAx_1} q_{x_1 y_1}^{(0)} \frac{dt}{chAt} = A \int_{-\ell_1}^{\ell_1} \frac{\sqrt{th^2 Al_1 - th^2 At}}{thAt - thAx_1} \tau_1^{(0)}(t) \frac{dt}{chAt} + C,$$

где $L_1 = [-\ell_1, \lambda_1^0]$; $L_2 = [\lambda_2^0, \ell_1]$.

Сделав замену переменных $\tau = thAt$; $y = thAx_1$; $a = thAl_1$; $\varphi(t) = chAt \cdot q_{x_1 y_1}^{(0)}(t)$, преобразуем уравнение (21) в сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши

$$\int_{L_1+L_2^*} \frac{\sqrt{a^2 - \tau^2}}{\tau - y} \varphi(\tau) d\tau = \pi f(y),$$

где $f(y) = C + \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - \tau^2}}{\tau - y} \tau_1^{(0)}(\tau) d\tau$; $L_1^* = [-a, -thAl_1^0]$;

$L_2^* = [thAl_2^0, a]$.

Решение этого уравнения будет [6]

$$\varphi(y) = \frac{1}{\pi X^+(y)} \left[- \int_{L_1+L_2^*} \frac{X^+(\tau) f(\tau) d\tau}{\tau - y} \right], \quad (22)$$

где $X^+(\tau) = \sqrt{(a^2 - \tau^2)(d_1^* - \tau)(\tau - d_2^*)}$; $d_1^* = thAl_1^0$; $d_2^* = thAl_2^0$.

Для определения неизвестных параметров λ_1^0 и λ_2^0 , определяющих размеры контактных концевых зон трещины поперечного сдвига, имеем условия конечности напряжений в окрестности вершин трещины. Эти условия найдем в следующем виде

$$A \int_{-\ell_1}^{\ell_1} \frac{\sqrt{thAl_1 + thAt}}{\sqrt{thAl_1 - thAt}} \frac{F_0^{**}(t) dt}{chAt} + C = 0; \quad (23)$$

$$A \int_{-\ell_1}^{\ell_1} \frac{\sqrt{thAl_1 - thAt}}{\sqrt{thAl_1 + thAt}} \frac{F_0^{**}(t) dt}{chAt} - C = 0.$$

Соотношение (4) в случае трещины поперечного сдвига в нулевом приближении можно записать в виде

$$u_0(x_1) = \frac{2G_1}{1 + \kappa_0} \frac{d}{dx_1} \left[C(x_1, \sigma_1^0) q_{x_1 y_1}^{(0)}(x_1) \right]. \quad (24)$$

Это уравнение служит для нахождения усилий $q_{x_1 y_1}^{(0)}$ в связях между берегами в концевых зонах L_1'' действия сил сцепления. Для построения недостающих алгебраических уравнений для нахождения приближенных значений напряжений $q_{x_1 y_1}^{(0)}(t_{m_2})$ потребуем выполнения условий (24) в узловых точках, содержащихся в концевых зонах L_1'' . При этом используется метод конечных разностей. В результате получаем алгебраическую систему из M_2 уравнений для определения приближенных значений $q_{x_1 y_1}^{(0)}(t_{m_2})$ в узловых точках концевых зон L_1'' .

После построения решения в нулевом приближении переходим к нахождению решения задачи (1)–(2) в первом приближении.

Граничные условия для второго напряженно-деформированного состояния в первом приближении будут иметь вид

- при $y = 0$:

$$\sigma_y^{(1)} = 0, \quad \tau_{xy}^{(1)} = 0;$$

- при $y = -h$:

$$\sigma_y^{(1)} = 0, \quad \tau_{xy}^{(1)} = 0; \quad (25)$$

- при $y_1 = 0$:

$$\sigma_{y_1}^{(1)} = -\sigma_1^1(x_1), \quad \tau_{x_1 y_1}^{(1)} = -\tau_1^1(x_1);$$

- на свободных берегах трещины:

$$\sigma_{y_1}^{(1)} = q_{y_1}^{(1)}(x_k) - \sigma_1^1(x_1), \quad \tau_{x_1 y_1}^{(1)} = q_{x_1 y_1}^{(1)}(x_1) - \tau_1^1(x_1) \text{ на } L_1'';$$

$$\sigma_{y_1}^{(1)} = p_{y_1}^{(1)}(x_k) - \sigma_1^1(x_1), \quad \tau_{x_1 y_1}^{(1)} = p_{x_1 y_1}^{(1)}(x_1) - \tau_1^1(x_1) \text{ на } L_1'''.$$

Здесь $\sigma_1^1(x_1)$ и $\tau_1^1(x_1)$ — нормальные и касательные напряжения, возникающие от действия вдавливания колеса в дорожное покрытие в сплошном бездефектном покрытии по оси y_1 , $|x_1| \leq \ell_1$ в первом приближении. Величины $\sigma_1^1(x_1)$ и $\tau_1^1(x_1)$ найдены в [2].

Поступая аналогично нулевому приближению, получим сингулярное интегральное уравнение в безразмерных координатах $\eta = t/\ell$, $\xi = x/\ell$ относительно искомой функции $g_1^1(\eta)$:

$$\int_{-1}^1 \frac{g_1^1(\eta) d\eta}{\eta - \xi} + \int_{-1}^1 \left[g_1^1(\eta) R(\xi, \eta) + \overline{g_1^1(\eta)} S(\xi, \eta) \right] d\eta = \pi F_1(\xi), \quad (26)$$

$$|\xi| < 1;$$

$$F_1(\xi) = \begin{cases} -(\sigma_1^1(\xi) - i\tau_1^1(\xi)) & \text{на } L_1'; \\ q_{y_1}^{(1)}(\xi) - iq_{x_1 y_1}^{(1)}(\xi) - (\sigma_1^{(1)}(\xi) - i\tau_1^{(1)}(\xi)) & \text{на } L_1''; \\ p_{y_1}^{(1)}(\xi) - ip_{x_1 y_1}^{(1)}(\xi) - (\sigma_1^1(\xi) - i\tau_1^1(\xi)) & \text{на } L_1'''; \end{cases}$$

$$\frac{i(1 + \kappa_0) g_1^1(x_1)}{2G_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} [u_1^+ - u_1^- + i(v_1^+ - v_1^-)]. \quad (27)$$

В правую часть сингулярного интегрального уравнения входят неизвестные усилия в связях $q_{y_1}^{(1)}$ и $q_{x_1 y_1}^{(1)}$ и контактные напряжения $p_{y_1}^{(1)}$ и $p_{x_1 y_1}^{(1)}$. Для их определения имеем условие (4) и условие отсутствия раскрытия берегов трещины в концевых контактных зонах в первом приближении.

Чтобы не повторяться, приведем основные разрешающие уравнения задачи первого приближения

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \ell_1 \left[g_1^1(t_m) R(\ell_1 t_m, \ell_1 x_r) + \overline{g_1^1(t_m)} S(\ell_1 t_m, \ell_1 x_r) \right] = F_1(x_r); \quad (28)$$

$$\sum_{m=1}^M g_1^1(t_m) = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, M - 1);$$

$$g_1^1(t_{m_1}) = 0 \quad (m_1 = 1, 2, \dots, M_1); \quad (29)$$

$$g_1^1(x_1) = \frac{2G_1}{1 + \kappa_0} \frac{d}{dx_1} \left[C(x_1, \sigma_1^1) (q_{y_1}^{(1)}(x_k) - iq_{x_1 y_1}^{(1)}(x_1)) \right]. \quad (30)$$

К дифференциальному уравнению аналогично нулевому приближению применяем метод конечных разностей.

К системам (28), (29) необходимо добавить условия конечности напряжений у вершин трещин

$$\sum_{m=1}^M (-1)^m g_1^1(t_m) \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} \pi = 0;$$

$$\sum_{m=1}^M (-1)^{M+m} g_1^1(t_m) \cdot \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4M} \pi = 0. \quad (31)$$

Получена замкнутая объединенная алгебраическая система комплексных уравнений для определения искомых функций в первом приближении. Отделяя в системах (28), (29), (30), (31) действительные и мнимые части, увеличиваем вдвое число уравнений системы, т.е. получим две действительные объединенные системы для определения $v_1(t_m)$, $q_{y_1}^{(1)}(t_m)$, $p_{y_1}^{(1)}(t_m)$ (трещина нормального разрыва) и $u_1(t_m)$, $q_{x_1 y_1}^{(1)}(t_m)$, $p_{x_1 y_1}^{(1)}(t_m)$ (трещина поперечного сдвига) соответствен-

но, а также размеров концевых контактных зон. Из-за неизвестных значений параметров λ_1^1 и λ_2^1 системы уравнений оказались нелинейными. Для решения нелинейных алгебраических систем используем метод последовательных приближений [7].

Результаты расчета контактных напряжений вдоль концевой контактной зоны представлены в виде графиков на рисунке 2; кривая 1 соответствует гладкой наружной поверхности покрытия; а кривая 2 — неровной поверхности.

Заключение. Модель трещины со связями между берегами в концевых зонах позволяет исследовать напряженно-деформированное состояние и основные закономерности распределения усилий в связях при частичном контактировании берегов трещин в сечении дорожного покрытия. Анализ моделирования напряженного состояния дорожного покрытия, ослабленного трещиной со связями между берегами, сводится к параметрическому исследованию полученных алгебраических уравнений при различных значениях свободных параметров пары «дорожное покрытие — упругое основание».

Таким образом, полученные соотношения позволяют на стадии проектирования решать следующие практически важные задачи:

1) оценивать гарантированный ресурс дорожного покрытия с учетом ожидаемых дефектов и условий нагружения;

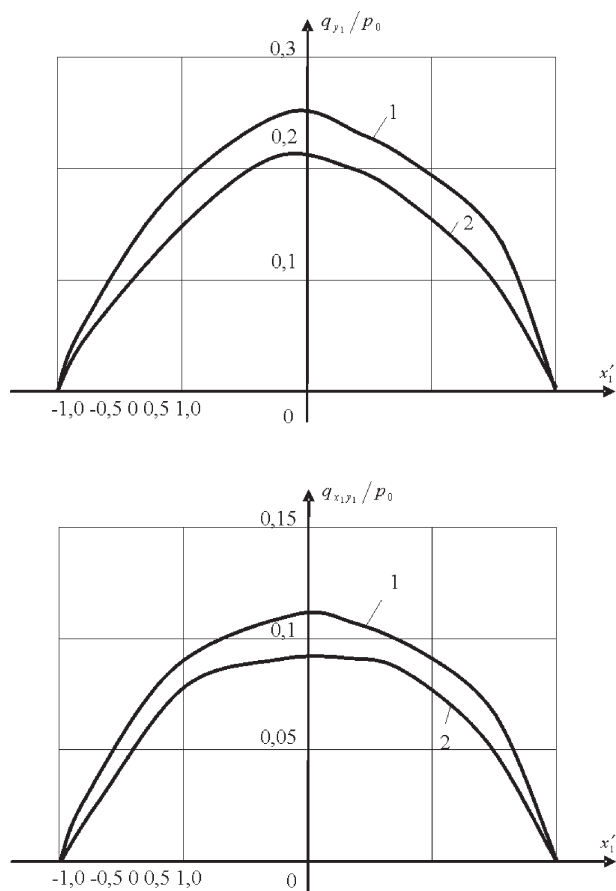


Рисунок 2 — Зависимости контактных напряжений вдоль левой концевой контактной зоны трещины

2) проводить выбор материала с необходимым комплексом статических и циклических характеристик трещиностойкости.

Список обозначений

ε — малый параметр;

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ — компоненты тензора напряжений;

u, v — компоненты вектора перемещений;

$q_{y_1}, q_{x_1y_1}$ — усилия в связях;

$p_{y_1}, p_{x_1y_1}$ — контактные напряжения в концевых зонах трещины;

$p(\theta)$ — контактное давление;

f — коэффициент трения;

h — толщина дорожного покрытия;

$\delta(x)$ — функция, описывающая поверхность катания покрытия;

ℓ_1 — полудлина трещины с концевыми зонами;

λ_1, λ_2 — параметры, характеризующие размеры контактных концевых зон;

d — параметр, характеризующий размер концевой зоны трещины;

$C(x_1, \sigma_1)$ — эффективная податливость связей;

σ_1 — модуль вектора усилий в связях;

$\Phi(z), \Psi(z)$ — комплексные потенциалы;

z — комплексная переменная;

κ_0 — постоянная Мусхелишвили;

G — модуль сдвига материала;

ν — коэффициент Пуассона материала.

Список литературы

1. The special issue: Cohesive models // Eng. Fract. Mech. — 2003. — Vol. 70, No 14. — Pp. 1741—1987.
2. Гасанов, Ш.Г. Моделирование напряженно-деформированного состояния в дорожном покрытии / Ш.Г. Гасанов // Ученые записи Азерб. архитектур.-строит. ун-та. — 2007. — № 2. — С. 151—159.
3. Мусхелишвили, Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили. — М.: Наука, 1966. — 707 с.
4. Панасюк, В.В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, А.П. Дацьшин. — Киев: Наук. думка, 197. — 443 с.
5. Саврук, М.П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами / М.П. Саврук. — Киев: Наук. думка, 1988. — 619 с.
6. Гахов, Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. — М.: Наука, 1977. — 640 с.
7. Мирсалимов, В.М. Неоднородные упругопластические задачи / В.М. Мирсалимов. — М.: Наука, 1987. — 256 с.

Hasanov Sh.H.

Cohesive crack with partially contacting faces in section of the road covering

The case of a longitudinal crack with interfacial bonds in section of a road covering with partially contacting faces is considered. It is considered, that under action of external loading (cave-in of a wheel in a rough surface of a covering) in a zone of compressing stresses there is a partial closing faces of a crack.

Поступила в редакцию 06.04.2011.